Extrait ANNALES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, tome 35, nos 1-2
Janvier - Février 1980

Théorie de la propagation dans les fibres multimodales déformées aléatoirement *

I. Théorie générale

Jacques ARNAUD
Professeur **

Martine LEBERRE-ROUSSEAU
Chargée de recherche au CNRS ***

Analyse

Une expression générale est obtenue qui décrit l'effet des microcourbures sur la transmission de fibres optiques multimodales. Cette expression est basée sur l'approximation des rayons paraxiaux.

Mots clés : Propagation onde, Propagation guidée, Guide onde optique, Fibre optique, Microcourbure, Guide onde multimode.

THEORY OF PROPAGATION IN RAMDOMLY DISTORTED MULTIMODE FIBERS. I. GENERAL THEORY

Abstract

A general expression is derived that describes the effect of microbending on propagation in multimode optical fibers. This expression is based on the paraxial ray approximation.

Key words : Wave propagation, Guided propagation, Optical waveguide, Optical fiber, Microbending, Multimode waveguide.

Sommaire

I. *Introduction.*
II. *Equation des rayons.*
III. *Théorie statistique.*
IV. *Cas des corrélations microscopiques.*
V. *Passage aux paramètres E, l.*
VI. *Phénomènes dépendant du temps.*
VII. *Conclusion.*
Annexes.
Bibliographie (13 réf.).

I. INTRODUCTION

Le guidage de faisceaux optiques par des milieux dont l'indice de réfraction décroît en fonction de la distance à l'axe a été étudié depuis plusieurs décades, en particulier dans le cas des lentilles à gaz (Berreman) [1]. Il faut mentionner également les études sur la propagation d'ondes radioélectriques dans les couches inférieures de l'atmosphère où les inversions de profils se rencontrent fréquemment (voir, par exemple Booker et Wilkinshaw) [2].

Le sujet a été exploré avec une ardeur nouvelle après la découverte de Kao [3], qui, en 1968, découvrit que la silice a des affaiblissements linéiques inférieurs à 20 dB par kilomètre. Le problème du guidage de la lumière par fibre de silice ou de verre acquit alors une importance fondamentale. Aujourd'hui, des affaiblissements linéiques inférieurs à 0,3 dB/km ont été mesurés à une longueur d'onde de 1,6 μm. Bien entendu, les résultats théoriques concernant la propagation dans les guides uniformes ou perturbés qui avaient été obtenus dans la période antérieure sont directement applicables aux fibres optiques, mais des problèmes nouveaux se posent. Nous utiliserons souvent l'analogie très étroite qui existe entre les ondes de de Broglie et les ondes optiques. Elle permet d'appliquer au problème de la propagation optique dans les fibres de nombreux résultats de mécanique quantique, ou de mécanique statistique.

Nous nous intéresserons dans ce travail uniquement aux fibres multimodales, c'est-à-dire aux fibres transportant un grand nombre de modes, par exemple plus de 2 000. Ces fibres sont à l'heure actuelle plus pratiques que les fibres dites *unimodales* car le diamètre du cœur est plus grand (disons 100 μm au lieu de 10 μm, pour fixer les idées). De ce fait, le

* Ce travail a bénéficié d'une aide de la Division optique de la DRET sur contrat n° 781/505.
** Laboratoire d'Electronique Micro-ondes, 87060 Limoges Cedex.
*** Laboratoire des Signaux et Systèmes, Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette.

raccord de ces fibres et leur couplage aux sources est plus facile. La plupart des propriétés de transmission de ces fibres multimodales est facilement expliquée par la théorie des rayons paraxiaux. Seules quelques propriétés particulières nécessitent l'emploi de théories ondulatoires telles que la théorie scalaire de Helmholtz ou, lorsque les effets de polarisation sont notables, les équations exactes de Maxwell. Nous nous limiterons ici à la théorie des rayons paraxiaux.

Rappelons brièvement les propriétés des fibres uniformes, considérant en premier lieu les fibres à saut d'indice. On note n_0 l'indice du cœur de la fibre et n_c l'indice de la gaine, et on définit la variation relative d'indice : $\Delta = (n_0 - n_c)/n_c$. D'après la loi de la réflexion totale, les rayons peuvent se propager dans la fibre avec un angle maximal $\sqrt{2\Delta}$ par rapport à l'axe. Il est clair que si la source excite une distribution continue de rayons faisant des angles différents par rapport à l'axe, les impulsions portées par ces rayons arriveront à des instants différents. Il en résultera un étalement des impulsions qui limite la capacité de transmission du système. Numériquement, cet étalement est de 5 000 Δ ns/km soit 50 ns/km, si $\Delta = 0{,}01$. On peut dire aussi que l'étalement temporel de l'impulsion est lié au fait que les différents modes susceptibles de se propager dans la fibre et excités par la source ont des vitesses de groupe différentes. Cet effet de dispersion modale peut être considérablement réduit si l'on utilise un profil convenable d'indice. En fait, on peut montrer que, tout au moins dans l'approximation paraxiale, il existe un profil qui égalise parfaitement les vitesses de groupe des différents modes susceptibles de se propager. L'écart de ce profil par rapport au profil quadratique, bien que minime, peut avoir des conséquences très importantes sur la bande passante. Ce profil est en fait si critique qu'il est très difficilement obtenu avec les techniques actuelles. Des améliorations d'un facteur 10 ou 20 par rapport au cas du saut d'indice ont été obtenues, mais des améliorations par un facteur 1 000 sont théoriquement possibles.

Après ce bref rappel concernant les fibres uniformes, considérons l'effet des irrégularités. La principale irrégularité observée en pratique, après fibrage et câblage, est l'irrégularité de microcourbure. Les fondements théoriques de ce type d'irrégularité ont été bien étudiés par Berreman [1], qui a souligné l'analogie suivante : le mouvement du rayon dans la fibre de profil d'indice $n(r)$ est analogue au mouvement d'une masse unité dans un potentiel $U(r) = 1 - n(r)/n(0)$ (*), si l'on remplace le temps t par la coordonnée axiale z. Si la fibre a une courbure locale $C(z)$, où z est maintenant une coordonnée définie le long de l'axe de la fibre, les mouvements du rayon, rapportés à l'axe de la fibre, sont analogues à ceux de la masse considérée précédente soumise à une force $C(t)$. Sur la base de cette analogie, on conçoit facilement qu'une variation de C à la fréquence (spatiale) naturelle d'oscillation du rayon entraînera un effet de résonance avec augmentation (exceptionnellement, réduction), rapide de l'amplitude du rayon. Lorsque l'angle du rayon par rapport à l'axe de la fibre excède $\sqrt{2\Delta}$, le rayon est transmis dans la gaine et perdu. Parmi tous les rayons injectés à l'entrée de la fibre, certains sont transmis avec peu de pertes, d'autres sont complètement atténués. On peut évaluer sur la base de ce modèle les pertes de microcourbure. Comme les fibres à large bande ont un profil proche du profil quadratique, les fibres sont analogues aux oscillateurs harmoniques en mécanique. La fréquence spatiale des rayons est pratiquement indépendante de l'amplitude du rayon, et seule intervient la valeur de la densité spectrale du processus courbure $C(z)$ à la fréquence naturelle d'oscillation des rayons. Dans les fibres à saut d'indice, au contraire, les rayons sont sensibles à un domaine spectral assez large de fréquences spatiales des déformations.

L'effet des déformations, d'une façon générale, est double. Les déformations provoquent l'apparition de pertes, comme nous l'avons déjà dit, mais ils modifient aussi la réponse impulsionnelle. Personick [6] a montré que, pour de très grandes longueurs de fibre, la largeur de l'impulsion est proportionnelle à la racine carrée de la longueur au lieu de varier linéairement. La capacité de transmission est donc accrue, au dépens de la puissance optique disponible au niveau du détecteur. Marcuse [7] a montré de façon plus précise que si $\mathcal{R}$ représente l'amélioration de la largeur impulsionnelle de la fibre déformée et $\mathcal{L}$ les pertes additionnelles de microcourbure, le produit $\mathcal{R}^2\mathcal{L}$ est constant pour une fibre de profil donné et un type de déformation donné. $\mathcal{R}^2\mathcal{L}$ est un nombre que l'on peut exprimer en décibels. Pour une fibre à large capacité, ce produit est pratiquement un nombre fixe, qu'il reste à déterminer précisément, mais qui paraît être de l'ordre du décibel.

Pour évaluer l'étalement des impulsions dans le cadre de l'optique géométrique paraxiale, il suffit en principe d'intégrer le temps élémentaire ds/u, où ds représente l'élément de longueur du rayon et u la vitesse de groupe locale, le long du rayon, sur toute la longueur de la fibre. Mais il est plus économique et instructif d'étudier théoriquement l'évolution des paramètres des rayons sur la base d'un modèle statistique.

La plupart des auteurs avaient jusqu'ici utilisé une théorie modale dans la limite des modes denses [7]. Mais cette théorie est si compliquée que de nombreuses approximations ont dues être introduites. Elles nous paraissent contestables : utilisation d'un nombre modal principal, approximation des coefficients de diffusion, etc. Nous avons montré dans des publications antérieures [5] que la théorie modale dans la limite des modes continus est en fait équivalente à la théorie des rayons, et que, dans le cadre

(*) Exceptionnellement, dans cet article, la fonction et l'opérateur seront désignés de la même façon.

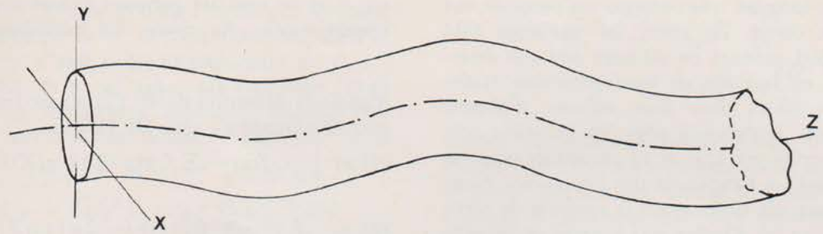

FIG. 1. — Fibre optique déformée.
Distorted optical fiber.

de cette dernière, les approximations faites habituellement sont inutiles. Notre théorie est exacte dans la limite de l'approximation Wentzel-Kramer-Brillouin (WKB) et pour des déformations qui ont peu d'influence sur les rayons sur une période (mais qui peuvent avoir des effets considérables sur des distances de l'ordre du kilomètre). Cette théorie est applicable aux fibres multimodales ayant un profil arbitraire et un spectre de microcourbure arbitraire. Le cas particulier du profil quadratique a été étudié récemment par Shatrov [8] sur la base de l'optique géométrique. Ses résultats sont en accord exact avec les nôtres. Par contre, les résultats publiés par Eve et Hannay [9], pour les plaques diélectriques homogènes, en principe sur les mêmes bases théoriques de départ, ne sont pas en accord avec nos résultats (*).

II. ÉQUATION DES RAYONS

Considérons tout d'abord une fibre qui est uniforme suivant la coordonnée axiale z et de profil d'indice de réfraction (de phase) $n(x, y)$. On pose $n(0, 0) = n_0$. Au lieu de l'indice n on peut utiliser une fonction *potentielle*

$$U(x, y) = 1 - n(x, y)/n_0 , \tag{1}$$

que l'on supposera positive et croissante. Il est facile de voir que dans l'approximation paraxiale, c'est-à-dire lorsque les rayons font des angles petits par rapport à l'axe z, l'équation des rayons s'écrit sous la forme

$$d^2x/dz^2 = - \partial U(x, y)/\partial x, \tag{2a}$$

$$d^2y/dz^2 = - \partial U(x, y)/\partial y, \tag{2b}$$

qui rappelle l'équation de Newton pour une masse unité.

Si l'axe de la fibre est courbé, avec des courbures C_x, C_y dans les plans xz et yz respectivement il suffit de retrancher à la fonction U le terme $C_x x + C_y y$. Cette procédure a été utilisée depuis longtemps pour tenir compte de la courbure de la Terre de rayon R dans les problèmes de propagation troposphérique (avec $C_x = 1/R$ et $C_y = 0$), les équations des rayons rapportés à l'axe de la fibre courbée sont donc

$$d^2x/dz^2 = - \partial U/\partial x + C_x , \tag{3a}$$

$$d^2y/dz^2 = - \partial U/\partial y + C_y . \tag{3b}$$

Si l'on se donne le profil d'indice $U(x, y)$ et les courbures $C_x(z)$, $C_y(z)$ (voir Fig. 1) ainsi que les conditions initiales sur un rayon, il est facile d'intégrer numériquement le système (3), et d'obtenir ainsi l'évolution de l'amplitude du rayon. Pour des raisons numériques, il est commode de poser $\dot{x} = dx/dz = p$; $\dot{y} = dy/dz = q$, et de réécrire (3) sous la forme d'un système du premier ordre

$$dx/dz = p, \tag{4a}$$

$$dp/dz = - \partial U/\partial x + C_x , \tag{4b}$$

$$dy/dz = q, \tag{4c}$$

$$dq/dz = - \partial U/\partial y + C_y . \tag{4d}$$

On s'intéressera principalement à la quantité

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(x, y), \tag{5}$$

qui est une mesure de l'amplitude du rayon (analogue à l'énergie en mécanique). Cette quantité est constante, en l'absence de courbure, le long d'un rayon.

Si $u(x, y)$ représente la vitesse de groupe en un point x, y de la fibre à la fréquence porteuse considérée, le temps de parcours d'une impulsion le long d'une trajectoire de rayon particulière est obtenue en intégrant, avec le système (3), l'équation

$$dt/dz = u^{-1} \, ds/dz, \tag{6}$$

où

$$ds/dz = (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{7}$$

Toutes les équations qui nous seront nécessaires par la suite ont maintenant été posées.

Il est évident que l'intégration purement numérique du système (3) et (6), le long d'une fibre de plusieurs

(*) Ces auteurs paraissent avoir omis de tenir compte du fait que le *nombre* de réflexions des rayons sur les parois, pour une longueur Δz de fibre fixé, est un nombre aléatoire, et non pas un nombre fixe.

kilomètres de long est très onéreuse du point de vue du temps de calcul. En outre, les courbures $C(z)$ sont en général connues ou estimées non pas directement mais en fonction de leurs propriétés statistiques. Nous allons donc nous efforcer d'obtenir des expressions analytiques pour les quantités présentant une utilité pratique, et en particulier pour les pertes moyennes et l'étalement des impulsions. Nous nous limiterons aux fibres ayant la symétrie de révolution, avec une loi d'indice $n(r)$ à partir de laquelle nous définissons la fonction potentielle à une variable

$$U(r) = 1 - n(r)/n_0 \,. \tag{8 a}$$

La fonction $U(x, y)$ utilisée précédemment est alors

$$U(x, y) = U(\sqrt{x^2 + y^2}). \tag{8 b}$$

De cette dernière expression, on déduit que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r}\,; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r}. \tag{9}$$

Pour ces profils à symétrie circulaire le moment angulaire

$$l = x\dot{y} - y\dot{x} \tag{10}$$

est constant en l'absence de déformation, comme on peut le vérifier en dérivant l totalement par rapport à z. En dérivant totalement (c'est-à-dire le long d'un rayon spécifié) E et l, définis par les équations (5) et (10) respectivement, par rapport à z, on obtient

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}z = \dot{x}C_x + \dot{y}C_y \,, \tag{11 a}$$

$$\mathrm{d}l/\mathrm{d}z = xC_y - yC_x \,. \tag{11 b}$$

Enfin, il est utile d'introduire l'*action* I du rayon, définie comme l'aire enclose par une trajectoire des rayons dans l'espace des phases (r, $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}z$), c'est-à-dire

$$I(E, l) = \oint \dot{r}\,\mathrm{d}r. \tag{12 a}$$

Il est facile de voir que, si I est considéré comme une fonction de E et de l, on a

$$\partial I/\partial E = Z\,; \quad \partial I/\partial l = -\,\Phi, \tag{12 b}$$

où Z et Φ représentent respectivement les périodes axiales et azimutales du rayon (*). Nous avons donc

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = Z\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} - \Phi\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}z} = (Z\dot{x} + \Phi y)\,C_x + (Z\dot{y} - \Phi x)\,C_y \,. \tag{11 c}$$

Introduisons maintenant une notation qui sera très utile par la suite. Posons

$$\rho(z) = x(z) + \mathrm{i}\,y(z) = r(z)\exp[\mathrm{i}\,\varphi(z)], \tag{13 a}$$

d'où

$$x = (\rho + \rho^*)/2\,; \quad y = (\rho - \rho^*)/2\,\mathrm{i}. \tag{13 b}$$

Observons que la fonction complexe

$$\mathrm{f}(z) = \rho(z)\exp(-\,\mathrm{i}\,z\Phi/Z), \tag{14}$$

(*) Z est la période de la courbe $r = r(z)$. Φ est la variation correspondante de l'azimut φ.

où Z et Φ sont les périodes axiales et azimutales, respectivement, du rayon, est périodique :

$$f(z + Z) = f(z),$$

d'après la définition de Φ. Cette fonction peut donc être développée en série de Fourier

$$f(z) = \sum_s f_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,sz/Z), \tag{15 a}$$

$$f_s = \frac{1}{Z}\int_0^Z f(z)\exp(-\,2\pi\,\mathrm{i}\,s\,z/Z)\,\mathrm{d}z, \tag{15 b}$$

la sommation sur s se faisant de $-\infty$ à $+\infty$. Nous avons donc aussi

$$\rho(z) = \sum_s f_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,u_s z)\,;\; u_s = (s + \Phi/2\pi)/Z, \tag{16 a}$$

et

$$\dot{\rho}(z) = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}z = \sum_s 2\pi\,\mathrm{i}\,u_s f_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,u_s z). \tag{16 b}$$

Si nous choisissons l'origine des axes z et φ à $\dot{x} = 0$, $y = 0$, nous avons $r(-\,z) = r(z)$, $\varphi(-\,z) = -\,\varphi(z)$ et par conséquent $\rho(-\,z) = \rho^*(z)$, $f(-\,z) = f^*(z)$, et tous les coefficients f_s sont réels. Explicitement

$$f_s = \frac{2}{Z}\int_0^{Z/2} r(z)\cos[\varphi(z) - 2\pi\,u_s z]\,\mathrm{d}z. \tag{17}$$

La fonction sous le signe somme est réelle, périodique de période Z, et extrémale aux limites d'intégration. Notons que, pour un rayon hélicoïdal, $r(z) =$ constante et $\varphi(z) = z\Phi/Z$. Il en résulte que, pour ce type de rayon, les f_s sont tous nuls sauf f_0 qui est égal à r. On comprend mieux ce résultat si l'on se souvient qu'une hélice se projette suivant une sinusoïde sur tous les plans méridiens, et n'a donc qu'un terme de Fourier. Nous aurons besoin dans la suite des quantités

$$\overline{\rho'^*\rho''}^{\,z} = \sum_s F_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,u_s\,\zeta), \tag{18 a}$$

$$\overline{\rho'^*\dot{\rho}''}^{\,z} = \sum_s 2\pi\,\mathrm{i}\,u_s F_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,u_s\,\zeta)), \tag{18 b}$$

$$\overline{\dot{\rho}'^*\dot{\rho}''}^{\,z} = \sum_s (2\pi\,u_s)^2 F_s \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,u_s\,\zeta), \tag{18 c}$$

où $\rho' = \rho(z')$, $\rho'' = \rho(z'')$ etc., z' et z'' étant deux valeurs quelconques de la coordonnée axiale, $\zeta = z'' - z'$, $F_s = f_s f_s^*$ et u_s est défini (16 *a*).. La barre supérieure indique une moyenne suivant z, calculée par exemple sur une période du rayon. Pour obtenir (18), il suffit de remplacer $\rho(z)$ par son expression (16), intervertir la somme sur s et l'intégrale sur z, et utiliser l'identité

$$\int_0^1 \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,n\,z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0, \\ 0 \text{ si } n \neq 0. \end{cases}$$

D'autres expressions sont obtenues à partir des équations (18) en échangeant les primes et les doubles primes avec ($\zeta \to -\,\zeta$), et en prenant les quantités complexes conjuguées des deux membres.

Notons que changer la direction angulaire initiale $\varphi(0) = \theta$ du rayon revient à remplacer ρ par $\rho\exp(\mathrm{i}\,\theta)$

et ρ^* par $\rho^*\exp(-\,\mathrm{i}\,\theta)$. Si donc l'on fait une moyenne sur θ la moyenne de $\rho'\,\rho''^*$ est inchangée, mais la moyenne de $\rho'\,\rho''$ est nulle. En exprimant x', y', x'', y'' en fonction de ρ', ρ'' grâce aux équations (13 *b*) nous pouvons maintenant facilement calculer les expressions suivantes, en faisant la moyenne sur θ

$$\overline{x'x''}^{\,\theta} = \overline{y'y''}^{\,\theta} = (\rho'\rho''^* + \rho'^*\rho'')/4, \tag{19 a}$$

$$\overline{x'y''}^{\,\theta} = -\,\overline{x''y'}^{\,\theta} = (\rho''\rho'^* - \rho'\rho''^*)/4\,\mathrm{i}. \tag{19 b}$$

Des formules similaires peuvent être obtenues en ajoutant des points (indiquant une dérivée par rapport à z) sur les quantités avec double primes (x'', y'', ρ'') de chaque côté de l'égalité, et d'autres encore en permutant les primes et les doubles primes.

Les moyennes sur z et θ des produits définis à partir de $X' = (x, y, \dot{x}, \dot{y})'$ et $X'' = (x, y, \dot{x}, \dot{y})''$ sont maintenant obtenues en prenant la moyenne sur z des expressions précédentes et en utilisant les expressions (18) pour les produits des ρ. On obtient, avec une notation condensée

$$\overline{X'X''}^{\,z,\theta} = \frac{1}{2}\sum_s F_s \begin{bmatrix} \cos & \sin & -\,\alpha\sin & \alpha\cos \\ -\sin & \cos & -\,\alpha\cos & -\,\alpha\sin \\ \alpha\sin & -\,\alpha\cos & \alpha^2\cos & \alpha^2\sin \\ \alpha\cos & \alpha\sin & -\,\alpha^2\sin & \alpha^2\cos \end{bmatrix} \tag{20 a}$$

où $\alpha = 2\pi\,u_s$ et l'argument des sinus et cosinus est $\pi\,u_s\zeta$. Par exemple, le tableau (20 *a*) donne, explicitement

$$\overline{\dot{x}'\dot{y}''}^{\,z,\theta} = \frac{1}{2}\sum_s F_s(2\pi\,u_s)^2\sin(2\pi\,u_s\,\zeta). \tag{20 b}$$

Nous allons maintenant considérer un ensemble de fibres et appliquer une théorie statistique.

III. THÉORIE STATISTIQUE

Pour faciliter les calculs nous considérons non plus une seule fibre mais un ensemble de fibres macroscopiquement identiques, c'est-à-dire qui ont le même profil d'indice et qui ne diffèrent que par la courbure de l'axe. Le signe $< >$ indiquera une moyenne d'ensemble. On admet la stationarité des processus $C_x(z)$ et $C_y(z)$ et on définit

$$< C_x(z + \zeta)\,C_x(z) > = \Gamma_{xx}(\zeta), \tag{21 a}$$

$$< C_y(z + \zeta)\,C_y(z) > = \Gamma_{yy}(\zeta), \tag{21 b}$$

$$< C_x(z + \zeta)\,C_y(z) > = \Gamma_{xy}(\zeta). \tag{21 c}$$

On peut montrer que, quel que soit le type de déformation, la probabilité (ou puissance) $Q(I, l)\,\mathrm{d}I\,\mathrm{d}l$ pour qu'un rayon ait une action entre I et $I + \mathrm{d}I$ et un moment angulaire entre l et $l + \mathrm{d}l$ obéit à l'équation aux dérivées partielles (voir l'annexe Π)

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial l}D_0\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial I}D_1\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l}D_1\frac{\partial Q}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I}D_2\frac{\partial Q}{\partial I}, \tag{22}$$

connue en mécanique sous le nom d'équation de Fokker-Planck. Dans cette expression, les D_k, $k = 0$, 1, 2 sont des fonctions de I et de l. On montre dans l'annexe I que, pour une fibre microcourbée

$$D_k = \frac{1}{2}\sum_s (2\pi\,s)^k F_s G_s \,, \tag{23}$$

où $F_s = f_s f_s^*$ est lié aux coefficients de Fourier f_s de la trajectoire des rayons non perturbée, et G_s est la densité spectrale du processus de courbure à la fréquence spatiale $(s + \Phi/2\pi)/Z$, où Φ et Z représentent les périodes azimutales et axiales du rayon, respectivement. La discussion des propriétés générales de l'équation (22) est faite dans l'annexe C.

Il convient de noter que les rayons hélicoïdaux, c'est-à-dire les rayons gardant une distance constante, r, à l'axe, ont une *action* I nulle. C'est une conséquence évidente de la définition de I (12 *a*), puisque $\dot{r} = 0$. D'autre part, la valeur maximale de l'énergie E est le changement relatif d'indice Δ, puisque, si $E > \Delta$, le rayon subit des pertes de rayonnement non nulles (*). Le domaine d'intégration de l'équation de diffusion (22) est donc celui représenté figure 2 *a*. La fonction $E = E(I, l)$ qui définit la borne supérieure où Q s'annule dépend du profil d'indice considéré.

Il est important d'observer que, pour toute fonction Q régulière, le flux de probabilité (ou de puissance optique) à travers la limite $I = 0$ est nul. En effet, écrivons (22) sous la forme d'une équation de continuité

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial J_l}{\partial l} + \frac{\partial J_I}{\partial I} = 0, \tag{24}$$

avec

$$-\,J_l = D_0\frac{\partial Q}{\partial l} + D_1\frac{\partial Q}{\partial I}, \tag{25}$$

$$-\,J_I = D_1\frac{\partial Q}{\partial l} + D_2\frac{\partial Q}{\partial I}. \tag{26}$$

Cette équation rappelle l'équation de continuité du courant électrique div $\vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$. Nous voulons montrer que, lorsque $I = 0$, alors $J_I = 0$. Nous avons observé (après (17)) que pour les rayons hélicoïdaux, $f_s = 0$ sauf si $s = 0$. Donc, d'après les expressions en (23), D_1 et D_2 sont nuls quand $I = 0$, ce qui montre que J_I est nul si les $\partial Q/\partial l$ et $\partial Q/\partial I$ sont bornés. Par contre, D_0 est non nul et a la valeur

$$D_0 = \frac{1}{2}r^2\,G(\Phi/2\pi Z), \tag{27}$$

(*) Nous introduisons ici une notion d'optique ondulatoire, car, d'après l'optique géométrique, la condition de réflexion totale est moins restrictive. Cependant, dans la limite des faibles déformations, il suffit, pour appliquer la condition $Q(E = \Delta) = 0$, que les pertes soient non nulles, si faibles soient-elles.

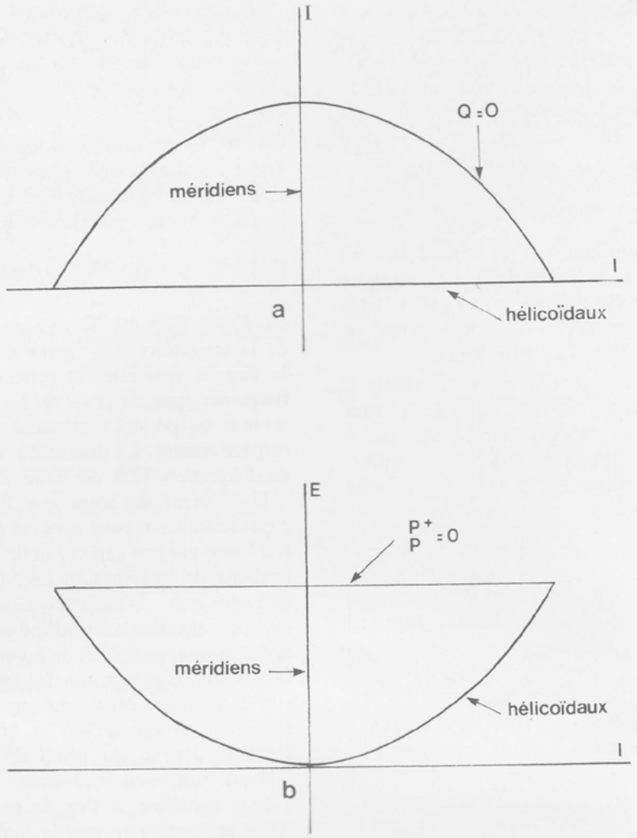

FIG. 2. — (a) Plan de définition de la fonction $Q(I, l)$.
(b) Plan de définition des fonctions $P(E, l)$ et $P^\dagger(E, l)$.

(a) *Plane of definition of the $Q(I, l)$ function.*
(b) *Plane of definition of the $P(E, l)$ and $P^\dagger(E, l)$ functions.*

où r est la distance à l'axe du rayon hélicoïdal considéré. La remarque précédente est importante car elle montre qu'il est inutile d'assurer la condition $J_I(I = 0) = 0$. Il suffit d'imposer la condition $Q(E = \Delta) = 0$.

IV. CAS DES CORRÉLATIONS MICROSCOPIQUES

Dans le cas où la corrélation de la courbure est microscopique (spectre plat), les coefficients de diffusion sont donnés par les équations (A-I 13), (A-I 14), (A-I 15). L'équation de diffusion est alors

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial J_I}{\partial I} + \frac{\partial J_l}{\partial l} = 0, \tag{28}$$

où nous avons posé

$$J_I = \frac{1}{2}\gamma\left[-(\Phi K + ZI)\frac{\partial Q}{\partial I} + K\frac{\partial Q}{\partial l}\right], \tag{29 a}$$

$$J_l = \frac{1}{2}\gamma\left[K\frac{\partial Q}{\partial I} - R\frac{\partial Q}{\partial l}\right], \tag{29 b}$$

et [voir l'équation (A-I 14 *b*)]

$$K = \Phi R - Zl. \tag{29 c}$$

Nous vérifions dans ce cas particulier des corrélations microscopiques que $J_I(I = 0) = 0$ pour tous Q régulier. En effet, on peut montrer que, si $I = 0$, alors $K = 0$.

V. PASSAGE AUX PARAMÈTRES E, l

Dans le cas des corrélations microscopiques, il est utile d'utiliser, à la place des variables I, l les

variables E, l. Nous avons alors deux choix possibles pour la nouvelle fonction. Nous pouvons définir une fonction

$$P^\dagger(E, l, z) = Q[I(E, l), l, z], \tag{30}$$

ou une fonction

$$P(E, l, z) = Q[I(E, l), l, z]\frac{\partial I(E, l)}{\partial E}, \tag{31}$$

$$= Z(E, l)\, Q[I(E, l), l, z],$$

qui conserve la probabilité totale. On peut montrer que $P^\dagger$ et P obéissent à des équations mutuellement adjointes.

La première fonction ($P^\dagger$) obéit à l'équation de Fokker-Planck inverse, tandis que la seconde fonction (P) obéit à l'équation de Fokker-Planck directe. D'après la définition de P, la puissance totale en z est obtenue en intégrant $P(E, l, z)\, dE\, dl$ dans le domaine de la figure 2 *b*.

Pour passer de l'équation en Q, (28) et (29) à l'équation en $P^\dagger$, il suffit d'appliquer des dérivations en chaîne. D'après l'équation (30) nous avons

$$Q(I, l, z) = P^\dagger[E(I, l), l, z]. \tag{32}$$

Donc

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P^\dagger}{\partial z}, \tag{33 a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I} = \frac{\partial P^\dagger}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial I}, \tag{33 b}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{\partial P^\dagger}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial l} + \frac{\partial P^\dagger}{\partial l}, \text{ etc.} \tag{33 c}$$

Rappelons que

$$\frac{\partial I}{\partial E} = Z \;;\; \frac{\partial I}{\partial l} = -\Phi. \tag{34}$$

Donc

$$\frac{\partial E}{\partial I} = Z^{-1} \;;\; \frac{\partial E}{\partial l} = \Phi/Z. \tag{35}$$

En effectuant ces transformations, nous obtenons pour $P^\dagger$ une expression remarquablement simple,

$$\gamma^{-1}\partial P^\dagger/\partial z = \partial P^\dagger/\partial E + (E - \bar{U})\,\partial^2 P^\dagger/\partial E^2 + \frac{1}{2}R\frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial l^2} + l\frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial E\,\partial l}. \tag{36}$$

Cette forme de l'équation de Fokker-Planck sera utilisée chaque fois que nous nous limiterons aux corrélations microscopiques.

VI. PHÉNOMÈNES DÉPENDANT DU TEMPS

Si Q dépend du temps, parce que la source est modulée, le calcul de la réponse temporelle de la fibre peut-être faite de deux façons différentes, mais strictement équivalentes. Premièrement, nous pouvons considérer un ensemble de trajectoires de rayons dans la fibre perturbée et intégrer le temps de parcours élémentaire ds/u le long de ces rayons, où ds représente l'arc géométrique élémentaire, et u la vitesse de groupe locale. Cette première méthode permet d'établir facilement, par application du théorème des limites centrales, que la réponse temporelle (et fréquentielle) est gaussienne pour de grandes longueurs de fibre. Ce théorème suppose la stationnarité du processus, mais cette condition est remplie asymptotiquement pour les trajectoires de rayons dont l'énergie E n'excède jamais Δ. Deuxièmement, nous pouvons généraliser l'équation de Fokker-Planck, en remplaçant $\partial Q/\partial z$ par $\partial Q/\partial z + v_g^{-1}\,\partial Q/\partial t$, où $v_g(I, l)$ est la vitesse de groupe moyenne associée au rayon de paramètres I, l. Formellement, ce terme supplémentaire vient de l'équation de Liouville spatio-temporelle qui s'écrit, en l'absence de distorsion, et moyennée sur une période de rayon

$$0 = \frac{dQ}{dz} = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t}\overline{\frac{dt}{dz}}. \tag{37}$$

En effet, par définition, $v_g = \overline{dz/dt}$.

Pour résoudre l'équation de Fokker-Planck modifiée, il est commode d'effectuer une transformation de Fourier en bande de base et de poser

$$Q(I, l, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{Q}(I, l, z, \Omega)\, e^{-i\Omega t}\, d\Omega. \tag{38}$$

Puis, de résoudre l'équation en $\tilde{Q}$ qui, maintenant, a des coefficients complexes.

L'équation de Fokker-Planck dans l'espace-temps présente en général des solutions stationnaires de la forme

$$\tilde{Q}(I, l, z, \Omega) = \tilde{Q}_m(I, l, \Omega)\exp[-\lambda_m(\Omega)z], \tag{39}$$

où $\lambda_m(\Omega)$ est la perte de microcourbure réelle du mode statistique d'ordre m (qui symbolise deux indices : m_1 et m_2, puisque le problème est bidimensionnel). La bande passante $\Omega_0/2\pi$ de la fibre, définie à 3 dB en puissance optique, correspond évidemment à $\exp[\lambda_m(\Omega_0)z] = 2$.

En définitive, la solution générale stationnaire de la propagation dans une fibre optique soumise à des microcourbures est donnée par l'équation aux valeurs propres

$$H\tilde{Q} = -\lambda\tilde{Q},$$

où l'opérateur H, qui est autoadjoint, a la forme (*)

$$H\left(I, l, \frac{\partial}{\partial I}, \frac{\partial}{\partial l}\right) = i\,\Omega\, v_g^{-1}(I, l) + \frac{\partial}{\partial l}D_0(I, l)\frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial I}D_1(I, l)\frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l}D_1(I, l)\frac{\partial}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I}D_2(I, l)\frac{\partial}{\partial I}. \tag{40}$$

(*) Du fait que l'opérateur H est autoadjoint au sens des nombres complexes, il résulte que l'intégrale de $Q_m Q_{m'}$ (sans conjugaison complexe) sur tout le domaine I, l, est nulle si m, m' correspondent à deux modes statistiques non dégénérés.

et dépend de quatre fonctions de I et l : v_g^{-1}, D_0, D_1 et D_2 faciles à calculer. La seule condition aux limites à imposer à $\tilde{Q}$ est $\tilde{Q}(I, (\Delta, l), l, \Omega) = 0$. Dans cette formulation, Ω joue le rôle d'un paramètre.
En l'absence de déformation ($D_0 = D_1 = D_2 = 0$), l'équation de départ

$$(41) \qquad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} = \mathbf{i}\,\Omega\, v_g^{-1}\,(I, l)\,\tilde{Q},$$

a une solution évidente, et la puissance totale $\bar{Q}(z, \Omega)$ en z

$$(42) \qquad \bar{Q}(z, \Omega) = \iint \exp\,[\mathbf{i}\,\Omega\, v_g^{-1}(I, l)\, z]\, \mathrm{d}I\, \mathrm{d}l,$$

est une fonction du seul produit Ωz. Ceci montre que, en l'absence de déformation, la bande passante est inversement proportionnelle à la longueur z de la fibre. On peut montrer que, par contre, en présence de déformations fortes, la bande passante est inversement proportionnelle à la *racine carrée* de la longueur de fibre [6]. Cette question sera analysée plus en détail dans un autre article.

VII. CONCLUSION

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une expression analytique simple et générale (22) et (23) qui décrit l'effet des microcourbures sur la propagation dans une fibre multimodale. Non seulement l'expression obtenue est plus simple que les expressions obtenues précédemment par les théories modales, mais elle est plus rigoureuse. Dans des publications ultérieures, nous étudierons en détail l'aspect temporel et nous ferons l'application de la théorie générale aux fibres à saut d'indice et aux fibres à grande capacité. Dans le cas des fibres à saut d'indice nous donnerons des expressions analytiques exactes pour les coefficients de diffusion D_0, D_1, D_2 qui s'introduisent dans l'équation autoadjointe de Fokker Planck. Celle-ci est résolue analytiquement. Si le spectre de microcourbure a la valeur constante γ, les pertes de microcourbure stationnaires sont égales à $6{,}27\ \gamma/\Delta$ dB par unité de longueur [10]. Ce chiffre peut être comparé à celui des fibres à profil quadratique : $7{,}9\ \gamma/\Delta$ dB par unité de longueur. Pour les fibres à saut d'indice, nous montrerons que le produit $\mathcal{R}^2\mathcal{L}$ défini dans le texte est égal à 0,74 dB. Ces résultats numériques fondamentaux feront l'objet d'explications détaillées [10]. Notons que la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux reste difficile, en dépit de nombreux efforts, car la déformation de fibres câblées ne peut pas être mesurée directement.

Manuscrit reçu le 23 *juillet* 1979
accepté le 26 *novembre* 1979.

ANNEXE I

Calcul des coefficients de diffusion D_k pour une fibre microcourbée

Soit l et I le moment angulaire et l'action du rayon, définis par les équations (10) et (12 *a*) du texte. Les coefficients de diffusion D_0, D_1 et D_2 qui s'introduisent dans l'équation de Fokker-Planck sont définis par (voir plus loin) :

(A-I 1 *a*)

$$D_0 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]^2 > / \Delta z,$$

(A-I 1 *b*)

$$D_1 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]\,[I(\Delta z) - I(0] > / \Delta z,$$

(A-I 1 *c*)

$$D_2 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]^2 > / \Delta z.$$

Il faut comprendre que, bien que Δz tende vers zéro, Δz reste beaucoup plus grand que la période Z des rayons. En effet, les déformations que nous considérons sont si faibles que les changements de I et de l sont petits pour une distance Z. Néanmoins, les effets globaux sur des longueurs de fibre de plusieurs kilomètres peuvent être importants.

Calcul de D_0. D'après (11 *b*), nous avons :

(A-I 2)

$$l(\Delta z) - l(0) = \int_0^{\Delta z} [x(z')\, C_y(z') - y(z')\, C_x(z')]\, \mathrm{d}z',$$

et, en supposant que l'on puisse intervertir intégrales et moyennes d'ensemble

(A-I 3)

$$D_0 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^{-1} \int_0^{\Delta z}\!\!\int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z'\mathrm{d}z''[x'\,x''\,\Gamma_{yy}(z'-z'') + y'y''\Gamma_{xx}(z'-z'') - x'y''\Gamma_{xy}(z'-z'') - y'x''\Gamma_{xy}(z'-z'')],$$

où nous avons posé pour abréger $x(z') = x'$, $x(z'') = x''$ etc. et les Γ sont les coefficients de corrélation des C [voir (21)].

Comme la trajectoire du rayon subit une précession uniforme autour de l'axe z, sauf dans les cas de dégénérescence que nous excluons pour l'instant, nous pouvons prendre des moyennes sur l'angle initial θ du rayon et utiliser les résultats du chapitre II. Dans ces conditions

$$(\text{A-I } 4) \qquad D_0 = \frac{1}{4} \sum_s F_s \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^{-1} \int_0^{\Delta z}\!\!\int_0^{\Delta z} \cos(2\pi u_s \zeta) \times [\Gamma_{xx}(\zeta) + \Gamma_{yy}(\zeta)]\, \mathrm{d}z'\mathrm{d}z'',$$

où, comme précédemment, $\zeta = z'' - z'$. Nous observons en outre que $\Gamma(\zeta)$ décroît lorsque ζ croît et

devient très petit avant que les limites du carré de surface $(\Delta z)^2$ soient atteintes (sauf peut-être lorsque la densité spectrale du processus décroît très vite avec la fréquence spatiale de la déformation, cas que nous excluons).

En introduisant la densité spectrale $G(u)$ du processus $C(z)$, densité réelle, positive et symétrique

$$(\text{A-I } 5) \qquad G(u) = G(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\zeta) \exp(2\pi \mathbf{i}\, \zeta u)\, \mathrm{d}\zeta,$$

et en utilisant l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi \mathbf{i}\, u x) = \delta(x),$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac, nous obtenons donc

$$(\text{A-I } 6\ a) \qquad D_0 = \frac{1}{2} \sum_s F_s G_s,$$

où

$$(\text{A-I } 6\ b) \qquad 2\,G_s = G_{xx}(u_s) + G_{yy}(u_s).$$

Cette quantité est indépendante de l'orientation des axes x, y, car la trace d'une matrice soumise à une transformation orthogonale est invariante. Comme cette trace est la seule quantité du premier ordre en Γ qui soit invariante, on devine que les déformations de la fibre seront caractérisées par la seule quantité $G_{xx} + G_{yy} = 2\,G$.

Calcul de D_1.

De façon similaire, calculons le coefficient D_1 défini (A I *b*) en utilisant l'expression de $\mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ (11 *c*)

(A-I 7)

$$D_1 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]\,[I(\Delta z) - I(0)] > / \Delta z$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^{-1} \int_0^{\Delta z}\!\!\int_0^{\Delta z} < [x'C'_y - y'C'_x] \times [(Zx'' + \Phi y'')\, C''_x + (Zy'' - \Phi x'')\, C''_y] > \mathrm{d}z'\, \mathrm{d}z''.$$

Après avoir fait une moyenne sur θ, en utilisant (20) et en faisant comme précédemment l'hypothèse que $\Gamma(\Delta z)\ Z \ll 1$, nous obtenons

$$(\text{A-I } 8) \qquad D_1 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^{-1} \int_0^{\Delta z}\!\!\int_0^{\Delta z} \sum_s 2\pi\, s\, F_s\, \Gamma(\zeta) \times \cos(2\pi u_s \zeta)\, \mathrm{d}z'\, \mathrm{d}z'',$$

car $2\pi\, u_s\, Z - \Phi = 2\pi\, s$, d'après la définition de u_s. Finalement, en introduisant la densité spectrale, on obtient

$$(\text{A-I } 9) \qquad D_1 = \frac{1}{2} \sum_s 2\pi\, s\, F_s G_s.$$

Calcul de D_2.

$$(\text{A-I } 10) \qquad D_2 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]^2 > / \Delta z$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^{-1} \int_0^{\Delta z}\!\!\int_0^{\Delta z} < [(Z\dot{x}' + \Phi y')\, C'_x + (Z\dot{y}' - \Phi x')\, C'_y] \times [(Z\dot{x}'' + \Phi y'')\, C''_x + (Z\dot{y}'' - \Phi x'')\, C''_y] > \mathrm{d}z'\, \mathrm{d}z''.$$

Prenant la moyenne sur θ, utilisant les équations (20) et observant que $(2\pi\, u_s Z - \Phi)^2 = (2\pi\, s)^2$ nous obtenons

$$(\text{A-I } 11) \qquad D_2 = \frac{1}{2} \sum_s (2\pi\, s)^2\, F_s G_s,$$

de telle sorte que D_0, D_1, D_2 peuvent s'écrire sous la forme

$$(\text{A-I } 12) \qquad D_k = \frac{1}{2} \sum_s (2\pi\, s)^k\, F_s G_s, \quad k = 0, 1, 2,$$

qui est l'équation (23) du texte.

Dans le cas où la corrélation de la courbure est microscopique, le spectre est uniforme et nous posons G_s [défini par l'équation (A-I 6 *b*)], égal à une constante, γ. Plutôt que de sommer les sommes infinies de l'équation (A-12) il est préférable de revenir aux équations (A-3), (A-7) et (A-10), en posant $\Gamma_{xx}(\zeta) = \gamma_x \delta(\zeta)$, $\Gamma_{yy}(\zeta) = \gamma_y\, \delta(\zeta)$, $\Gamma_{xy}(\zeta) = 0$, où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac. Nous obtenons alors immédiatement

$$(\text{A-I } 13) \qquad D_0 = \frac{1}{2}\, \gamma\, R,$$

où $2\,\gamma = \gamma_x + \gamma_y$ et R est la moyenne sur un rayon de $r^2 = x^2 + y^2$. En procédant de la même façon pour D_1 nous obtenons

$$(\text{A-I } 14\ a) \qquad D_1 = \frac{1}{2}\, \gamma(Zl - \Phi R) = -\frac{1}{2}\, \gamma K,$$

où $l = x\dot{y} - y\dot{x}$ est le moment angulaire du rayon et R a été défini précédemment ; nous avons posé

$$(\text{A-I } 14\ b) \qquad K = \Phi R - Zl.$$

Enfin,

$$(\text{A-I } 15) \qquad D_2 = \frac{1}{2}\, \gamma[Z^2\, 2(E - \bar{U}) + \Phi^2 R - 2\,\Phi\, Zl],$$

où nous avons introduit la moyenne $\bar{U}$ sur un rayon de la fonction potentielle U, avec

$$(\text{A-I } 16) \qquad 2(E - \bar{U}) = \overline{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Dans la formulation du chapitre III, toutes les quantités introduites (y compris E), doivent être exprimées en fonction des paramètres I et l.

L'expression en (A-15) peut être simplifiée si nous observons que

$$(\text{A-I } 17) \qquad 2\,Z(E - \bar{U}) = I + l\Phi.$$

Nous avons donc

$$(\text{A-I } 18) \qquad D_2 = \frac{1}{2}\, \gamma(\Phi K + Z I),$$

le paramètre K étant défini en (A-I 14 *b*).

Sans réétablir ici la théorie de l'équation de Fokker-Planck, ce qui nous entraînerait trop loin, nous voudrions donner quelques indications concernant la justification des relations fondamentales (A-I 1) déjà utilisées. Pour simplifier, nous considérons une seule variable, I. Q est donc une fonction de I et de z.

Supposons que $Q(I, 0) = \delta(I - I_0)$ ce qui veut dire que la valeur initiale I_0 de I est connue avec précision. Pour $z > 0$, $Q(1, z)$ évolue selon l'équation

$$\text{(A-I 19)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I} \mathrm{D}(I) \frac{\partial Q}{\partial I}.$$

Il s'agit de montrer que

$$\text{(A-I 20)} \qquad \mathrm{D}(I) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [I(\Delta z) - I(0)]^2 > / \Delta z.$$

D'après nos hypothèses, $I(0)$ est certain et a la valeur I_0. Nous pouvons donc réécrire le membre de droite de (A-I 20) sous la forme

$$\text{(A-I 21)} \qquad D(I) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} < I^2(z) > - I_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} < I(z) >.$$

Ces dérivées et D, sont évaluées en $I = I_0$. Par définition

$$\text{(A-I 22)} \qquad < I^2(z) > = \int I^2 \, Q(I, z) \, \mathrm{d}I,$$

$$\text{(A-I 23)} \qquad < I(z) > = \int I \, Q(I, z) \, \mathrm{d}I.$$

En dérivant sous le signe somme et remplaçant $\partial Q / \partial z$ par son expression en (A-I 19), nous obtenons

$$\text{(A-I 24)} \qquad \int \left(\frac{1}{2} I^2 - I_0 I \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I} D(I) \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}I} \, \mathrm{d}I.$$

En intégrant le membre de droite deux fois par parties (Q ou $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}I$ étant nuls aux limites d'intégration), nous obtenons bien $D(I)$ à droite du signe égal de (A-I 24), ce qui démontre l'expression (A-I 20) de $D(I)$, si l'on admet la forme (A-I 19).

ANNEXE II

Détermination de l'équation de Fokker-Planck à partir de la théorie des modes couplés

Nous voulons montrer que la puissance $Q(I, l, z)$ $\mathrm{d}I$ $\mathrm{d}l$ transportée par les rayons dont l'action est comprise entre I et $I + \mathrm{d}I$ et le moment angulaire entre l et $l + \mathrm{d}l$ obéit à l'équation auto-adjointe (22), où D_0, D_1, D_2 sont des fonctions de I et de l. Ce résultat peut être obtenu sur la base de la théorie des rayons en considérant la perturbation de la fonction hamiltonienne par la déformation de la fibre, comme l'a proposé Shatrov [8], sans toutefois donner les détails de ses calculs. Nous allons montrer comment ce résultat peut être obtenu à partir de la théorie des puissances couplées proposée initialement dans le domaine de l'optique par Young [11]. Cette théorie, incidemment, est formellement identique à la théorie développée en 1928 par Pauli dans le cadre de la mécanique quantique (voir Van Hove [12]). Dans le problème d'optique qui nous concerne les coefficients de couplage sont symétriques, ce qui n'est pas le cas en général en mécanique quantique ou dans le problème d'optique si les pertes différentielles sont très élevées (voir Marcuse [13]). Il résulte de la symétrie des coefficients de couplage que l'équation de Fokker-Planck peut être écrite sous forme autoadjointe si l'on prend comme variables indépendantes les nombres de mode, ou les variables I, l qui leur sont proportionnelles.

En accord avec la théorie de Young, nous postulons donc que la puissance couplée par unité de longueur du mode m au mode m' est proportionnel à la différence $Q_m - Q_{m'}$ des puissances avec un coefficient de couplage

$$\text{(A-II 1)} \qquad d_{mm'} = d_{m'm},$$

qui restent à calculer pour des déformations données. L'équation des modes couplés s'écrit donc

$$\text{(A-II 2)} \qquad \frac{\mathrm{d}Q_m}{\mathrm{d}z} = - \alpha_m Q_m + \sum_{m'} d_{m'm} (Q_{m'} - Q_m),$$

si les pertes du mode m sont notées α_m. Ce terme de perte sera omis dans la suite pour alléger.

L'indice m qui repère les modes guidés est en fait une notation condensée pour m_1, m_2 (ou μ, α) pour une fibre dans l'espace à trois dimensions. Si maintenant nous écrivons les indices entre parenthèses et omettons les virgules de séparation pour abréger, (II 2) devient

$$\text{(A-II 3)} \qquad \frac{\partial}{\partial z} Q(m_1 m_2 z) = \sum_{m_1' m_2'} d(m_1 m_2 m_1' m_2') \times [Q(m_1' \, m_2' z) - Q(m_1 m_2 z)].$$

D'autre part, nous définissons la quantité

$$\text{(A-II 4)} \qquad d_{s_1 s_2}(\bar{m}_1 \, \bar{m}_2) = d(\bar{m}_1 - s_1/2, \, \bar{m}_2 - s_2/2, \, \bar{m}_1 + s_1/2, \, \bar{m}_2 + s_2/2),$$

où les $\bar{m} = (m + m')/2$ représentent les nombres moyens des modes couplés considérés, et les $s = m' - m$ les écarts. En raison de la réciprocité (A-II 1), nous avons

$$\text{(A-II 5)} \qquad d_{s_1 s_2}(\bar{m}_1 \, \bar{m}_2) = d_{-s_1 - s_2}(\bar{m}_1 \, \bar{m}_2).$$

Nous supposons maintenant que les modes sont très denses et que $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$ peuvent être considérés comme des variables continues. Nous pouvons alors développer $d(m)$ en série de Taylor sous la forme

$$\text{(A-II 6)} \qquad d(m_1 \, m_2 \, m_1' \, m_2') = d_{s_1 s_2} + \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial \bar{m}_1} \frac{s_1}{2} + \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial \bar{m}_2} \frac{s_2}{2} + \ldots$$

De la même façon, développons $Q(m)$ en série de Taylor

$$\text{(A-II 7)} \qquad Q(m_1 \, m_2 z) = Q + \frac{\partial Q}{\partial m_1} s_1 + \frac{\partial Q}{\partial m_2} s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1 \, \partial m_2} s_1 s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_2^2} s_2^2,$$

où les dérivées sont évaluées à $m_1 = \bar{m}_1$, $m_2 = \bar{m}_2$ et sont des fonctions de z. Nous substituons maintenant les développements de d et Q en (A-II 6) et (A-II 7), respectivement, dans l'équation des puissances couplées (A-II 3), où la somme sur m_1, m_2 est remplacée par une somme sur s_1, s_2. En raison de la symétrie, (A-II 5), il suffit d'effectuer la sommation sur les valeurs de s_1, s_2 représentées par des points sur la figure A-II 1.

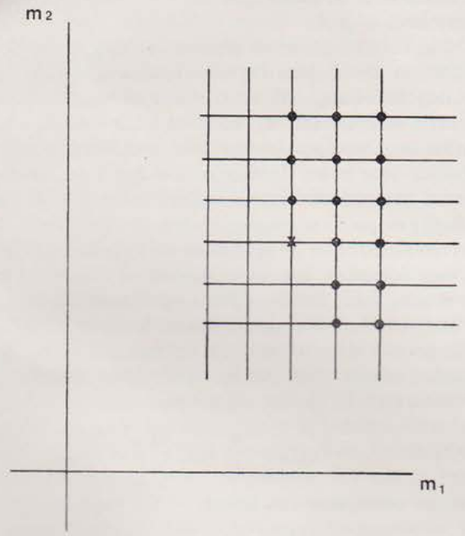

FIG. AII-1. — Plan du nombre des modes m_1, m_2. En raison de la symétrie des coefficients de couplage en puissance, il suffit de considérer le couplage du mode représenté par une croix avec les modes représentés par des points.

FIG. AII-1. — *Plane of the mode numbers* m_1, m_2. *Because of the symmetry of the power-coupling coefficients it is sufficient to consider the coupling of the modes shown by a cross with those modes shown by black points.*

Cette sommation réduite est représentée par des crochets autour de s_1, s_2. En nous limitant aux termes du second ordre nous avons

$$\text{(A-II 8)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \sum_{[s_1 s_2]} \left(d_{s_1 s_2} + \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial m_1} \frac{s_1}{2} + \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial m_2} \frac{s_2}{2} \right) \times \left(\frac{\partial Q}{\partial m_1} s_1 + \frac{\partial Q}{\partial m_2} s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1 \, \partial m_2} s_1 s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_2^2} s_2^2 \right) + \left(d_{s_1 s_2} - \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial m_1} \frac{s_1}{2} - \frac{\partial d_{s_1 s_2}}{\partial m_2} \frac{s_2}{2} \right) \times \left(- \frac{\partial Q}{\partial m_1} s_1 - \frac{\partial Q}{\partial m_2} s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1 \, \partial m_2} s_1 s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_2^2} s_2^2 \right).$$

Après simplification nous obtenons

$$\text{(A-II 9)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial m_1} D_{11} \frac{\partial Q}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial m_1} D_{12} \frac{\partial Q}{\partial m_2} + \frac{\partial}{\partial m_2} D_{21} \frac{\partial Q}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial m_2} D_{22} \frac{\partial Q}{\partial m_2};$$

si nous posons

$$D_{11} = \sum_{[s_1 s_2]} d_{s_1 s_2} \, s_1^2,$$

$$\text{(A-II 10)} \qquad D_{12} = D_{21} = \sum_{[s_1 s_2]} d_{s_1 s_2} \, s_1 s_2,$$

$$D_{22} = \sum_{[s_1 s_2]} d_{s_1 s_2} \, s_2^2.$$

Dans la limite considérée des modes denses, et à condition que les séries convergent, les termes d'ordre plus élevé tendent vers zéro. Contrairement à ce qui a été affirmé par Marcuse [7], il n'est nullement nécessaire de négliger le couplage entre modes non-adjacents pour obtenir une équation aux dérivées partielles (au lieu d'une équation intégro-différentielle). Nous avons obtenu une équation de Fokker-Planck qui est autoadjointe puisque $D_{12} = D_{21}$.

Notons que les coefficients de diffusion D_{ij} peuvent être écrits

$$\text{(A-II 11)} \qquad D_{ij}(m_1 \, m_2) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \to 0} < [m_i(\Delta z) - m_i(0)] \times [m_j(\Delta z) - m_j(0)] > / \Delta z,$$

si, pour n'importe quelle fonction régulière $a(m_1, m_2)$, on pose

(A-II 12)

$$< a(m_1 \, m_2) > = \iint_S a(m_1 \, m_2) \, Q(m_1 \, m_2 z) \, \mathrm{d}m_1 \, \mathrm{d}m_2,$$

Q étant nul, ou de flux nul, sur le contour C de la surface S définie dans le plan m_1, m_2.

On voit que pour une déformation quelconque les coefficients de diffusion sont donnés par une somme double. Dans le cas de fibres ayant la symétrie de révolution les indices m_1, m_2 sont remplacés par les indices μ, α qui représentent respectivement les nombres azimutaux et radiaux. Dans le cas des microcourbures, la perturbation est, comme on l'a vu dans le texte (3)

$$\text{(A-II 13)} \qquad C_x = Cr(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})/2.$$

Pour évaluer le couplage, on intègre le produit des champs des modes et la perturbation C_x, il en résulte que seuls sont couplés les modes dont les ordres azimutaux diffèrent d'une unité. La double somme de (A-II 10) se réduit alors à une simple somme. La correspondance entre les nombres de mode α, μ et les paramètres de rayons I, l est donnée par la méthode WKB.

$$\text{(A-II 14)} \qquad \alpha = I/\lambda, \qquad \mu = 2\pi l/\lambda; \quad \lambda = \lambda_0/n_0$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Par ailleurs, l'*énergie* E du rayon est relié à la constante de propagation β par

$$\text{(A-II 15)} \qquad \beta = 2\pi(1 - E)/\lambda.$$

Il est donc facile de réécrire l'équation (A-II 9) en utilisant comme variables indépendantes I et l au lieu de α et μ. On obtient ainsi une équation auto-adjointe de la forme donnée dans le texte.

ANNEXE III

Discussion des propriétés de l'équation de Fokker-Planck

La formule (22) du texte est tout à fait générale puisqu'elle est applicable à une fibre ayant un profil d'indice quelconque et une distortion quelconque (mais lente par rapport à la longueur d'onde dans le milieu afin qu'une théorie des rayons soit applicable. Dans le cas de diffuseurs de dimension comparable à la longueur d'onde, le rayonnement ne se fait pas au voisinage étroit de la direction de l'onde incidente, et il faut par conséquent utiliser une équation intégro-différentielle). Cette formule (22) est établie en annexe II à l'aide d'une théorie modale. Il est peut être utile de rappeler que la forme classique de l'équation de Fokker-Planck est

$$\text{(A-III 1)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial I}[A(I)\,Q] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I^2}[B(I)\,Q],$$

où nous avons considéré une seule variable, I, pour simplifier, au lieu des deux variables (I, l) du texte. Il est clair que la forme

$$\text{(A-III 2)} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial I}\left[D(I)\,\frac{\partial Q}{\partial I}\right],$$

que nous avons obtenue est un cas spécial de la forme générale (A-III 1) avec

$$\text{(A-III 3)} \qquad B(I) = 2\,D(I)\ ; \quad A(I) = \mathrm{d}D(I)/\mathrm{d}I.$$

Un rayon est défini par sa position x et sa pente $\dot{x}$, c'est-à-dire par un point dans l'espace des phases. Dans cet espace, il décrit en fonction de z une courbe fermée dont la surface est l'action I (égale à λm en théorie modale, si m est l'ordre du mode et λ la longueur d'onde dans le milieu, à un terme 1/2 près, qui est sans importance ici). Il faut bien voir que la valeur de I reste pratiquement inchangée pour une distance axiale très supérieure à la période z du rayon en raison de la petitesse des déformations considérées. Si donc nous considérons une très légère fluctuation $\mathrm{d}I$ de I, nous obtiendrons des rayons ayant toutes les valeurs de x, $\dot{x}$ compatibles avec la valeur de I choisie, car ils ont le temps de s'étaler le long de la trajectoire dans l'espace des phases pour toute valeur de Z. On peut aussi invoquer le fait que les rayons considérés ne sont que des abstractions et qu'il est plus physique de considérer des modes, qui doivent être représentés, dans l'approximation WKB, non pas par des rayons isolés, mais par des congruences de rayons uniformément distribués le long d'une trajectoire de l'espace des phases. Il faut reconnaître qu'il y a là un passage assez délicat entre les concepts de rayon et de mode, qui est justifié par l'accord final, au niveau statistique, entre les méthodes de rayon et les méthodes ondulatoires. Les mêmes difficultés sont d'ailleurs soulignées dans les traités de mécanique statistique classique et quantique. Le but de cette discussion est de montrer qu'il est correct de caractériser un rayon seulement par le paramètre I, et l'évolution lente de ce paramètre en fonction de z, plutôt que par l'évolution des deux paramètres x et $\dot{x}$.

Nous avons à plusieurs reprises souligné le fait que l'équation de Fokker-Planck obtenue (A-III 2) est autoadjointe, lorsqu'elle est exprimée en fonction de la variable indépendante I. Précisons ici le sens de cette remarque. Une équation est dite formellement auto-adjointe si elle est inchangée lorsque l'on inverse l'ordre des opérateurs $(\partial/\partial I,\ \mathrm{D}(I),\ \partial/\partial I$ dans le cas présent) et que l'on change le signe des opérateurs de dérivation $(\partial/\partial I \to -\partial/\partial I$ dans le cas présent). Pour qu'une équation soit autoadjointe, il faut que les conditions aux limites soient également adjointes. Quand ces conditions sont réunies, les solutions sont orthogonales dans un sens qui va être précisé par un calcul explicite. Les modes statistiques associés à l'équation (A-III 2) sont définis par

$$\text{(A-III 4)} \qquad -\lambda_m Q_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\,D(I)\,\frac{\mathrm{d}Q_m}{\mathrm{d}I},$$

avec les conditions aux limites

$$\text{(A-III 5)} \qquad D(I)\,\frac{\mathrm{d}Q_m}{\mathrm{d}I} = 0,\ I = 0\ ;\ Q_m(I_{\max}) = 0.$$

Démontrons la relation d'orthogonalité

$$\text{(A-III 6)} \qquad \int_0^{I_{\max}} Q_m(I)\,Q_n(I)\,\mathrm{d}I = 0, \quad m \neq n.$$

Pour établir ce résultat, multiplions l'équation (A-III 4) par Q_n, écrivons une relation similaire en échangeant m et n, retranchons membre à membre et intégrons sur I. Nous obtenons

$$\text{(A-III 7)} \qquad (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^{I_{\max}} Q_m\,Q_n\,\mathrm{d}I$$
$$= \int_0^{I_{\max}} \left[Q_n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\left(D\,\frac{\mathrm{d}Q_m}{\mathrm{d}I}\right) - Q_m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\left(D\,\frac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}I}\right)\right]\mathrm{d}I.$$

Le membre de droite est nul par intégration par parties en raison des conditions aux limites (A-III 5). Donc l'équation (A-III 6) est établie si $\lambda_m \neq \lambda_n$.

Notons en outre que si nous choisissons comme variable indépendante E au lieu de I, avec $\mathrm{d}I/\mathrm{d}E = Z$, et utilisons comme variable dépendante, soit

$$\text{(A-III 8)} \qquad P^{\dagger}(E) = Q(I(E)),$$

soit

$$\text{(A-III 9)} \qquad P^{\dagger}(E)\,\mathrm{d}E = Q(I(E))\,\mathrm{d}I,$$

la relation d'orthogonalité devient

$$\text{(A-III 10)} \qquad \int_0^{E_{\max} = \Delta} P_m^{\dagger}(E)\,P_n(E)\,\mathrm{d}E = 0, \quad m \neq n.$$

Nous avons vu dans le texte que, pour le cas des microcourbures, le coefficient de diffusion D est nul en $I = 0$ (on peut conjecturer que ce résultat est général). Il en résulte que pour satisfaire la condition de l'équation (A-III 5) qui exprime le fait qu'il n'y a pas de flux de puissance (ou de probabilité) vers les I négatif, il n'est pas nécessaire d'imposer la condition $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}I = 0$ en $I = 0$, si $Q(I)$ est régulier en ce point. La condition essentielle est que $Q = 0$ lorsque I atteint la valeur $I_{\max}$ au delà de laquelle les pertes sont non nulles (mais pas nécessairement infinies). Contrairement à ce qui a parfois été dit dans la littérature, nous pensons que la condition $Q(I = I_{\max}) = 0$ est la condition à la limite correcte à appliquer, dans la limite des faibles déformations $(\gamma Z \to 0)$, même si les pertes ne sont pas infinies pour $I > I_{\max}$. Rappelons que nous supposons les pertes nulles, en l'absence de déformation, lorsque $I < I_{\max}$. On peut évidemment se demander si dans les cas pratiques où les pertes de microcourbure sont de l'ordre du décibel par kilomètre on peut considérer que la déformation est suffisamment faible pour autoriser l'approximation $Q(I = I_{\max}) = 0$. Nous pensons que c'est le cas pour les fibres à deux dimensions car les rayons réfractés ont des pertes qui augmentent très vite lorsque I excède $I_{\max}$, mais ce n'est peut-être pas le cas pour les fibres ayant la symétrie circulaire car certains rayons ont des pertes très faibles. Quoi qu'il en soit, nous ne considérons ici que la limite mathématique $\gamma Z \to 0$. Nous avons montré que le rapport $Q(I_{\max})/Q(0)$ tend vers zéro comme une puissance 2/5 de γ. Les détails du calcul cependant ne seront pas donnés ici. Une explication physique plausible de ce résultat est la suivante : quand la déformation est très faible, une augmentation de, disons un pour cent, de I nécessite une distance axiale très grande. Sur cette distance, les pertes totales sont très grandes même si les pertes par unité de longueur sont finies, et en fait tendent vers l'infini quand γ tend vers zéro.

Avant de conclure cette annexe, essayons de préciser la notion de modes statistiques. Ces modes apparaissent naturellement parce que les coefficients de diffusion D sont indépendants de z, par séparation des variables. Ils sont obtenus en posant : $Q(I, z) = Q_m(I)\,\exp(-\lambda_m z)$, $Q_m(I)$ étant la fonction propre, et λ_m la valeur propre (ou perte de microcourbure). On obtient ainsi toute une suite de modes statistiques, dont seul le premier est partout positif. Certains auteurs en ont conclu que les modes statistiques supérieurs n'avaient pas d'existence physique individuelle, mais pouvaient être utilisés seulement dans des combinaisons telles que la somme soit partout positive. Nous pensons que tous les modes statistiques ont une existence physique individuelle, si l'on tient compte du fait que la gaine d'une fibre peut transporter une puissance optique non nulle. Mathématiquement, cela revient à ajouter aux solutions obtenues une constante telle que la puissance soit partout positive. Ce concept pourrait d'ailleurs donner lieu à une méthode de mesure originale, dans laquelle on exciterait à l'entrée de la fibre la gaine (considérée comme un réservoir presque inépuisable de puissance optique), mais non le cœur. On pourrait alors étudier la façon dont le cœur se remplit de puissance optique sous l'influence des déformations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERREMAN (D. W.). Growth of oscillations of a ray about the irregularity wavy axis of a lens light guide. *Bell Syst. tech. J.* USA (1965), **44**, pp. 2117-2132.

[2] BOOKER (H. G.), WALKINSHAW (W.). Meterological factors in radio-wave propagation. *Physical. Soc.* Londres (1946).

[3] KAO (K. C.), DAVIES (T. W.). Spectrophotometric studies of ultra low losses optical glasses. I : single beam method. *J. Scient. Inst.* GB (1968), **1**, (sér. 2), pp. 1063-1068.

[4] MIYA (T.), TERUNUMA (Y.), HOSAKA (T.), MIYASTRITA (T.). Ultimate low-loss simple-mode fiber at 1.55 μm. *Electronic letters*, GB (1979), **15**, pp. 106-108.

[5] ARNAUD (J.). Use of principal mode numbers in the theory of microbending. *Electron. letters*, GB (1978), **14**, pp. 663 664.

[6] PERSONICK (S.). Baseband linearity and equalization in fiber optic digital communication systems. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1973), **52**, pp. 1175-1194.

[7] MARCUSE (D.). Theory of dielectric optical waveguide, *Acad. Press*, New York (1974).

[8] SHATROV (A. D.). Ray statistics in multimode irregular optical fibres. *Radiotekhnika*, URSS (1977), **20**, pp. 1153-1164.

[9] EVE (M.), HANNAY (J. H.). Ray theory of random coupling in an optical fiber waveguide. *J. Opt. Quant. Electr.*, USA (1976), **8**, pp. 503-512.

[10] CLAPEAU (M.), ARNAUD (J.). Bandwidth of step-index fibers with microbending. *Arch. Elektron Ubertrag-Tech.*, Deutsch. (1979), **33**, pp. 441-442.

[11] YOUNG (D.). Model for relating coupled power equations. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1963), **42**, pp. 2761-2764.

[12] VAN HOVE. The approach to equilibrium in quantum statistics. *Physica*, Netherl. (1957), **26**, pp. 441.

[13] MARCUSE (D). Coupled power equations for lossy fibers. *Appl. Opt.*, USA (1978), **17**, pp. 3232-3237.