

Théorie de la propagation dans les fibres multimodales déformées aléatoirement. II. Application aux fibres à saut d'indice *

Michel CLAPEAU
Assistant, Docteur 3^e cycle **

Jacques ARNAUD
Professeur **

Analyse

La théorie des rayons dans l'approximation paraxiale décrite dans la partie I de cette série d'articles est appliquée à la fibre multimodale à saut d'indice déformée aléatoirement. Cette théorie montre que les pertes de microcourbures stationnaires sont égales à $6,27 \gamma/\Delta$ dB/unité de longueur, où γ est la densité spectrale de la microcourbure et Δ le changement relatif d'indice. Le carré du facteur d'amélioration de la bande de transmission dû aux distorsions multiplié par les pertes en dB est égal à 0,74 dB. Les performances d'une fibre de 10 km de long excitée par une source lambertienne sont discutées.

Mots clés : Propagation onde, Propagation guidée, Guide onde optique, Fibre optique, Guide onde multimode, Microcourbure, Rayon optique, Rayon paraxial.

role of the distortion on bandwidth is illustrated for a 10 km long fiber, excited by a lambertian source.

Key words : Wave propagation, Guided propagation, Optical waveguide, Optical fiber, Microbending, Multimode waveguide, Optical ray, Paraxial ray.

Sommaire

- I. Introduction.
 - II. Théorie des rayons appliquée à la fibre à saut d'indice.
 - III. Etude des microcourbures à spectre uniforme.
 - IV. Pertes pour une excitation quelconque.
 - V. Réponse fréquentielle.
 - VI. Conclusions.
- Annexes.
Bibliographie (4 réf.).

THEORY OF PROPAGATION IN RANDOMLY DISTORTED MULTIMODE FIBERS

II. APPLICATION TO STEP INDEX FIBERS

Abstract

The paraxial ray theory applied to randomly distorted multimode optical fibers in Part I is applied here to step-index fibers with microbending. This technique provides a stationary microbending loss equal to $6,27 \gamma/\Delta$ dB/unit length, where γ denotes the spectral density of the curvature process and Δ the relative index change. The product of the square of the bandwidth improvement factor by the loss in dB is equal to 0,74 dB. The

I. INTRODUCTION

La plupart des fibres câblées souffrent à un degré plus ou moins grand de microcourbure, c'est-à-dire d'une déformation aléatoire de l'axe de la fibre. Cette déformation a pour effet de réduire la puissance optique disponible au niveau du détecteur ; mais elle a aussi pour effet d'augmenter la bande passante. Une formule simple a été démontrée dans la première partie de cette étude qui donne les coefficients de

* Ce travail a bénéficié d'une aide de la Division Optique de la DRET sur contrat n° 78/505.

** Au Laboratoire d'Electronique des Microondes, ERA CNRS n° 535, 123, rue Albert-Thomas, F. 87060 Limoges.

diffusion des rayons dans une fibre déformée pour des profils d'indice quelconques et des spectres de microcourbure quelconques. En général, la résolution de l'équation de diffusion ainsi obtenue (équation dite de Fokker-Planck) sous la forme auto-adjointe doit être faite numériquement. Dans cette seconde partie de notre étude, nous appliquons le résultat général au cas important des fibres à saut d'indice. Ce type de fibre est économique s'il est réalisé avec un cœur de silice immergé dans une résine. Il est donc intéressant dans certaines applications, bien que la bande passante soit médiocre. La théorie de ce type de fibre a déjà été faite par Olshansky [2] sur la base d'hypothèses criticables [3]. En particulier, il n'est pas permis de combiner les nombres modaux radiaux et azimutaux en un seul nombre commun, comme cet auteur l'a fait. Il est donc intéressant d'examiner les conséquences de la théorie développée dans la première partie de cette étude, théorie qui est rigoureuse dans l'approximation Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB).

Pour des raisons de simplicité, nous négligerons ici les pertes de dissipation. Un rayon ne subit donc une perte que lorsqu'il dépasse l'angle critique. On suppose alors la perte infinie. C'est là une approximation correcte pour les faibles déformations.

Nous supposons aussi que le spectre de microcourbure est uniforme, c'est-à-dire, que la corrélation de la microcourbure est microscopique. Le cas de spectres non uniformes, et en particulier le cas de spectres pointus, est intéressant et il sera étudié ultérieurement. Il est certes facile d'introduire des coefficients de pertes réalistes, tenant compte des pertes de cœur, de gaine, de fuite, etc., mais il nous a paru essentiel de bien préciser dans une première étape les résultats pour le cas d'une fibre sans pertes avant d'analyser, dans une seconde étape, des modèles plus réalistes.

Nous montrons que, pour la fibre à saut d'indice, tous les coefficients de diffusion peuvent être évalués analytiquement. Dans le cas considéré de courbures à corrélation microscopique, il est commode d'utiliser comme variable, non pas l'action I et le moment angulaire l du rayon, mais l'énergie E et l . Nous utilisons donc la forme, eq. (36) de la partie I [1]. Les résultats numériques seront présentés à la fois sous forme normalisée, et aussi, pour illustration, sous forme explicite pour une longueur de fibre de 10 km.

II. THÉORIE DES RAYONS APPLIQUÉE A LA FIBRE A SAUT D'INDICE

Notons r_c le rayon du cœur de la fibre, n_0 l'indice du cœur, n_c l'indice de la gaine et définissons la variation relative d'indice $\Delta = (n_0 - n_c)/n_c$. Les

coordonnées dans le plan de section de la fibre sont x et y ; z est la coordonnée le long de l'axe de la fibre.

La théorie des rayons nous amène à définir les quantités suivantes :

$$(1 a) \text{ potentiel } U(x, y) = 1 - n(x, y)/n_0,$$

$$(1 b) \text{ énergie } E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U; \dot{x} = \frac{dx}{dz}; \dot{y} = \frac{dy}{dz},$$

$$(1 c) \text{ moment angulaire } l = x\dot{y} - y\dot{x},$$

qui sont les analogues de quantités mécaniques de même nom.

Afin de simplifier les relations on introduit les quantités normalisées :

$$(2) \quad \varepsilon = E/\Delta; \quad \nu = l/r_c \sqrt{2\Delta}.$$

Dans le cas de la fibre à saut d'indice qui nous intéresse ici, la fonction potentielle demeure nulle dans le cœur de la fibre ($U = 0$), ce qui donne une trajectoire de rayon rectiligne avec réflexion lorsque $r =$

La détermination de la période axiale Z et de la période azimutale Φ est obtenue en considérant le rayon de la figure 1. Pour un tel rayon nous avons donc $\dot{y} = \sqrt{2E}$ et $r_{\min} = l/\sqrt{2E}$

$$(3 a) \quad Z = \int_0^z dz = 2 \int_0^{\sqrt{r_c^2 - r_{\min}^2}} \frac{dy}{\dot{y}} = r_c \left(\frac{2}{E} \left(1 - \frac{l^2}{r_c^2 2E} \right) \right)^{1/2}.$$

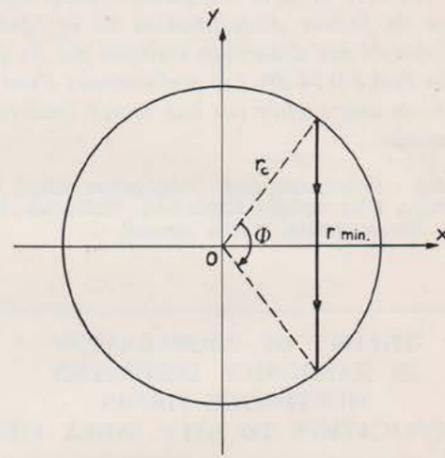


FIG. 1. — Section droite d'une fibre à saut d'indice. On a représenté un rayon dirigé suivant l'axe y . Φ représente la période azimutale, qui est définie comme la différence angulaire entre deux maximums adjacents de r . La période correspondante suivant l'axe z est notée Z .

FIG. 1. — Cross section of a step-index fiber. We have represented a ray directed along the y -axis. Φ represents the azimuthal period, defined as the angular difference between adjacent maxima of r . The corresponding axial period is denoted Z .

Nous ferons intervenir une période axiale normalisée :

$$(3 b) \quad Z_n = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \frac{Z}{r_c} = \frac{(\varepsilon - \nu^2)^{1/2}}{\varepsilon}.$$

La période azimutale est donnée directement par :

$$(4) \quad \Phi = 2 \arctan \frac{\sqrt{r_c^2 - r_{\min}^2}}{r_{\min}} = 2 \arctan \left(\frac{\varepsilon}{\nu^2} - 1 \right)^{1/2}.$$

La quantité :

$$(5 a) \quad R = r^2 = \frac{1}{Z} \oint \left(\frac{r^2}{\dot{r}} \right) dr,$$

nous sera également utile. Son expression normalisée est

$$(5 b) \quad \rho = \frac{R}{r_c^2} = (1 + 2\nu^2/\varepsilon)/3.$$

III. ÉTUDE DES MICROCOURBURES A SPECTRE UNIFORME

Les déformations de l'axe de la fibre sont caractérisées par les courbures locales $C_x(z)$ et $C_y(z)$ dans les plans xz et yz respectivement, z représentant maintenant une coordonnée le long de l'axe déformé de la fibre. Nous supposons que la densité spectrale de microcourbure

$$(6) \quad G_{x,y}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle C_{x,y}(z) C_{x,y}(z + \zeta) \rangle \exp(i\Omega\zeta) d\zeta,$$

garde une valeur constante γ , et de plus que C_x et C_y ne sont pas corrélés, c'est-à-dire :

$$(7) \quad \langle C_x(z') C_y(z'') \rangle = 0.$$

En fait, il n'est pas nécessaire de supposer que $G_x = G_y$.

Dans le cas général on posera $\gamma = \frac{1}{2}(G_x + G_y)$.

Dans ces conditions, la probabilité $P^\dagger(\varepsilon, \nu, z)$ qu'un rayon initialement caractérisé par les paramètres ε et ν atteigne des valeurs spécifiées de ε et ν en z satisfait l'équation (dite de Fokker-Planck inverse).

$$(8) \quad \frac{\partial P^\dagger}{\partial z} = \frac{\partial P^\dagger}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{\nu^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \nu^2} + \nu \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \varepsilon \partial \nu},$$

où $\bar{z} = \frac{\gamma}{\Delta} z$ est une distance axiale normalisée.

On suppose qu'un rayon ne se propage dans la fibre que si $E < \Delta$ ($\varepsilon < 1$). De plus, la condition $r_{\min} < r_c$ ($\varepsilon > \nu^2$) doit être satisfaite. Le domaine d'intégration de l'équation (8) est donc limité, d'une part, par la droite horizontale $\varepsilon = 1$ sur laquelle nous imposons la condition $P^\dagger(1, \nu, z) = 0$, et d'autre part par la parabole $\varepsilon = \nu^2$ correspondant aux rayons hélicoïdaux (si $\nu \neq 0$). Les rayons méridiens correspondent à l'axe $\nu = 0$ (Fig. 2).

Notons que le point $\varepsilon = \nu = 0$ est singulier et le comportement de P^\dagger en son voisinage doit être étudié avec soin.

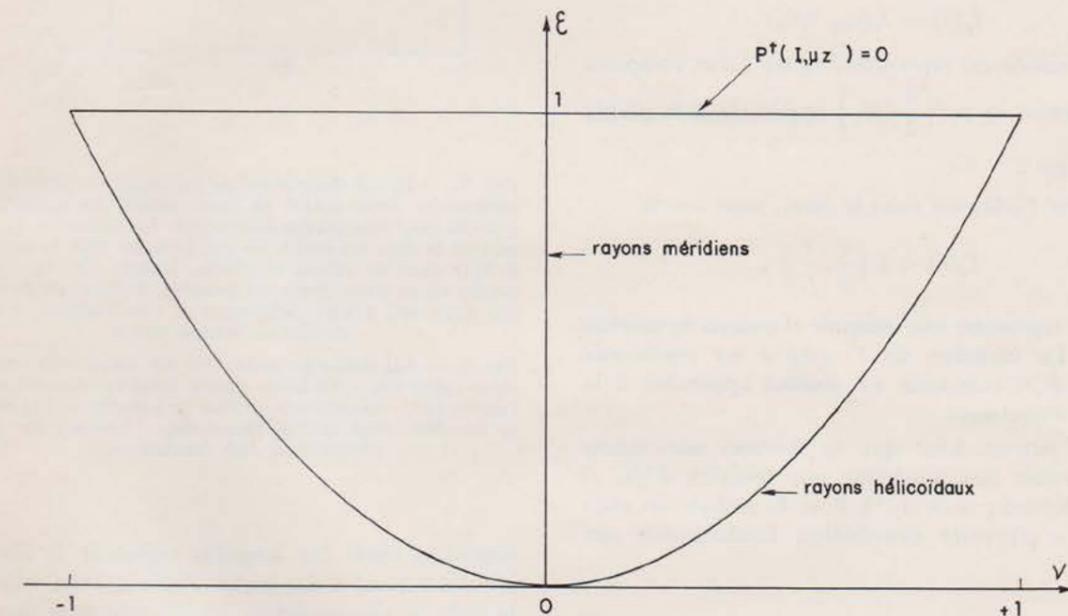


FIG. 2. — Domaine de définition de la puissance optique. $\varepsilon = E/\Delta$ est l'énergie normalisée du rayon et ν le moment angulaire normalisé. $\nu > 0$ correspond à des rayons d'hélicité droite et $\nu < 0$ à des rayons d'hélicité gauche. On admet que $P^\dagger = 0$ à l'angle critique $\varepsilon = 1$. Il n'y a pas de flux de puissance à travers le contour parabolique $\varepsilon = \nu^2$, correspondant aux rayons hélicoïdaux.

FIG. 2. — Domain of definition of non zero optical power. $\varepsilon = E/\Delta$ is the normalized ray « energy » and ν the normalized ray « angular momentum ». $\nu > 0$ ($\nu < 0$) corresponds to positive (negative) ray helicity. We postulate that $P^\dagger = 0$ at the critical angle $\varepsilon = 1$. The power flux vanishes through the parabolic contour corresponding to $\varepsilon = \nu^2$ (helical rays).

Les modes statistiques sont obtenus en posant :

$$(9) \quad P_m^\dagger(\varepsilon, \nu, z) = P_m^\dagger(\varepsilon, \nu) \exp(-\lambda_m z).$$

Considérons en particulier les modes indépendants du moment angulaire. Ils sont donnés par la solution analytique de l'équation (8) :

$$(10) \quad P_m^\dagger(\varepsilon) = J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}); \quad u_{0m} = 2 \left(\lambda_m \frac{\gamma}{\Delta} \right)^{1/2}$$

est le m^{e} zéro de la fonction de Bessel J_0 . La probabilité $P(\varepsilon, \nu, z)$ qui correspond à la puissance optique a , pour les modes stationnaires envisagés, la forme [1] :

$$(11) \quad P_m(\varepsilon, \nu, z) = Z_m(\varepsilon, \nu) J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}) \exp(-\lambda_m z),$$

la période normalisée Z_m étant donnée en eq. (3 b).

Les pertes des microcourbures pour les premiers modes statistiques sont donc :

$$(12) \quad \alpha_0 = 6,27 \gamma/\Delta; \quad \alpha_1 = 33,06 \gamma/\Delta; \quad \alpha_2 = 81,25 \gamma/\Delta,$$

en décibels par unité de longueur; α_0 correspondant à l'ordre $m = 0$ donne les pertes de microcourbure du mode statistique fondamental qui seul se propage après une longueur suffisante de fibre.

La détermination du champ lointain et du champ proche pour ces modes statistiques peut être obtenue analytiquement. Les détails de calcul sont donnés dans l'annexe I. Nous obtenons les expressions suivantes :

— pour le diagramme de rayonnement

$$(13) \quad I_m(\theta) = J_0(u_{0m} \theta/\theta_c).$$

Cette variation est représentée figure 3 a et comparée à la variation en $\cos\left(\frac{\pi}{2} \theta/\theta_c\right)$ applicable à la plaque diélectrique ;

— pour l'intensité dans le cœur, nous avons

$$(14) \quad I'_m(r) = E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{r_c} \right),$$

où $E(\dots)$ représente une intégrale elliptique de seconde espèce. La variation de I' avec r est représentée figure 3 b et comparée au résultat applicable à la plaque diélectrique.

Nous voyons donc que la solution stationnaire fondamentale fait intervenir une fonction $P^\dagger(\varepsilon, z)$ qui ne dépend pas de ν (*). Pour la plupart des excitations, c'est cette distribution fondamentale qui

(*) Une observation curieuse, mais dont la signification physique nous échappe pour le moment, est que l'équation en P (équation directe de Fokker-Planck) admet elle aussi une série de solutions indépendantes de ν . Analytiquement, il s'agit de fonctions de Bessel d'ordre imaginaire. Il n'y a cependant pas de rapport simple et évident entre les deux séries de solutions, car $P = ZP^\dagger$, où Z dépend de ν . Donc, si P ne dépend pas de ν , P^\dagger en dépend et vice versa. Les détails algébriques sont donnés en Annexe II.

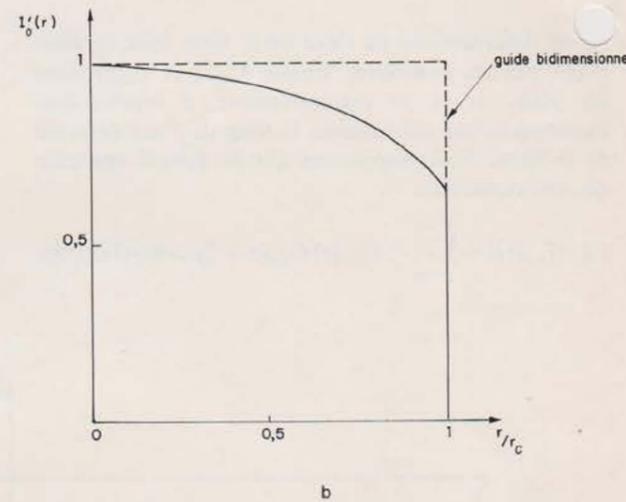
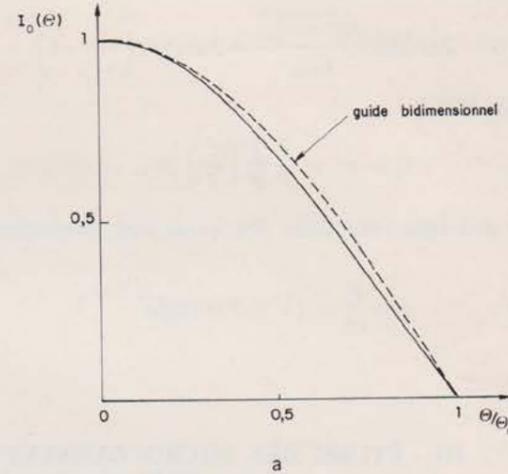


FIG. 3. — En (a) diagramme de rayonnement, pour le mode stationnaire fondamental, en traits pleins. En pointillé, diagramme pour une plaque diélectrique. La réfraction à l'extrémité de la fibre est omise. En (b), intensité dans la section de la fibre dans les mêmes conditions (courbe dite de « champ proche »), en traits pleins. En pointillé, distribution de l'intensité pour une plaque diélectrique si l'on remplace r par la coordonnée transversale x .

FIG. 3. — (a) Radiation pattern for the steady-state statistical mode (plain line). Radiation pattern for a two-dimensional slab (dashed line). Refraction at the fiber tip is neglected. (b) Intensity in the fiber cross section (plain line). Intensity for a two-dimensional slab (dashed line).

subsistera après une longueur suffisante de fibre car elle correspond à des pertes minimales. La valeur de la perte de microcourbure α_0 (12) que nous obtenons alors diffère peu de celle donnée par Olshansky [2]. Mais cet accord approximatif n'existe que pour des spectres de microcourbure uniforme.

En général, il n'est pas possible de nous limiter au résultat analytique simple concernant $P^\dagger(\varepsilon, z)$, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les fibres ne sont

en général pas suffisamment longues, ou les déformations suffisamment fortes, pour qu'il soit permis de négliger l'influence de modes statistiques supérieurs, pour la plupart des excitations (particulièrement en raison de la présence d'épissures imparfaites le long du câble). Certains modes statistiques supérieurs sont indépendants de ν comme on l'a vu (voir la série de l'équation (12)), mais la plupart des modes statistiques supérieurs dépendent en fait de ν . Si l'on classe les modes statistiques dans l'ordre des pertes croissantes, le deuxième mode n'est pas celui qui correspond à α_1 , dans l'équation (12), mais un mode à variation en ν (voir Annexe III). Pour calculer les pertes de microcourbure d'une fibre de longueur finie et d'excitation quelconque, nous devons donc intégrer l'équation complète (8). C'est ce qui est fait dans le paragraphe suivant. En second lieu, la réponse temporelle dépend en principe de tous les modes statistiques, même dans la limite de longueur de fibre infinie. Il se trouve cependant que, pour une fibre à saut d'indice, le temps de groupe dépend de ε et non de ν , ce qui simplifie les calculs algébriques. On peut donc se ramener à la considération des seuls modes statistiques P^\dagger indépendants de ν . Mais ici encore, cette simplification n'est valable que pour des fibres très longues ou très déformées (et de plus sans pertes et dont le spectre de microcourbure est uniforme). Nous avons donc préféré obtenir la réponse temporelle par intégration numérique de l'équation de Fokker-Planck (§ V).

IV. PERTES POUR UNE EXCITATION QUELCONQUE

L'intégration numérique de l'équation (8) a permis d'établir l'évolution des pertes de microcourbure en fonction de la longueur de propagation dans la fibre pour différentes excitations en $z = 0$ (Fig. 4).

La méthode numérique réalise une incrémentation en \bar{z} de pas H ; nous posons :

$$\bar{z}_i = iH,$$

et

$$(15) \quad P^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}_{i+1}) = P^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}_i) + H \left(\frac{\partial P^\dagger}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}_i}.$$

Nous utilisons dans le plan ε, ν un maillage de l'ordre de 1250 points et le terme $(\partial P^\dagger / \partial \bar{z})_{\bar{z}_i}$ est déduit de l'équation (8) par une méthode de différences finies. La puissance optique totale dans la fibre à une distance \bar{z} est ensuite calculée à partir de

$$(16) \quad P(\bar{z}) = \int_{\varepsilon, \nu} Z_m(\varepsilon, \nu) P^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}) d\varepsilon d\nu.$$

Le domaine d'intégration ε, ν étant celui représenté sur la figure 2. D'après la figure 4, la pente des courbes pour les grandes valeurs de \bar{z} tend bien vers la valeur

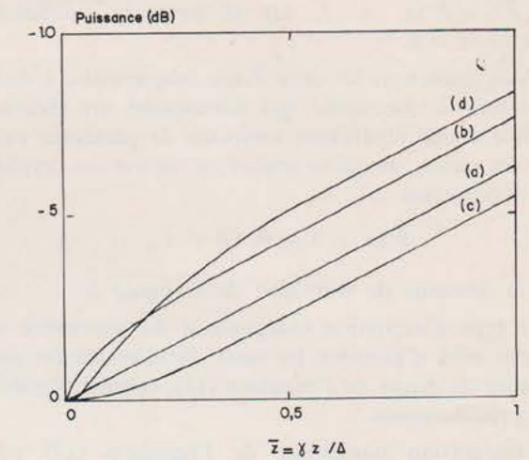


FIG. 4. — Pertes d'une fibre microcourbée à saut d'indice et spectre uniforme en fonction de la distance axiale pour diverses excitations en $z = 0$. (a) Distribution stationnaire. (b) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu)$. (c) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu)$ pour $\varepsilon \leq 1/2$, $P(\varepsilon, \nu) = 0$ pour $\varepsilon > 1/2$. (d) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu) \delta(\varepsilon - 1/2)$ où $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac. Dans tous les cas la pente asymptotique est de $6,27 \gamma/\Delta$ dB/unité de longueur.

FIG. 4. — Losses of a step-index fiber with microbending of constant spectral density for various excitation conditions. (a) steady-state distribution. (b) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu)$. (c) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu)$ for $\varepsilon \leq 1/2$, $P(\varepsilon, \nu) = 0$ for $\varepsilon > 1/2$. (d) $P(\varepsilon, \nu) = \delta(\nu) \delta(\varepsilon - 1/2)$, where $\delta(\cdot)$ denotes Dirac distribution. In every case the asymptotic slope is $6.27 \gamma/\Delta$ dB/unit length.

α_0 des pertes du mode statistique fondamental calculée analytiquement, quelles que soient les conditions initiales $P(\varepsilon, \nu, 0)$. Nos calculs montrent comment les courbes se différencient compte tenu de l'excitation. Comme certaines des excitations choisies dépendent du paramètre ν , les résultats correspondants n'auraient pas pu être obtenus à partir de théories qui ignorent la variation de la puissance en fonction de ce paramètre.

V. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE

Pour déterminer la réponse fréquentielle de la fibre ; il convient d'introduire dans le second membre de l'équation (8) le terme $(\Delta^2/\gamma u_0) \varepsilon \frac{\partial P^\dagger}{\partial t}$ et de considérer la transformée de Fourier $\tilde{P}^\dagger(\Omega)$ de $P^\dagger(t)$ où Ω représente la fréquence angulaire en bande de base. Ce terme est lié au fait que la différence entre le temps de groupe pour un rayon d'énergie ε et le temps de groupe d'un rayon axial est proportionnel à ε . L'équation (8) modifiée et transformée dans le domaine de Ω s'écrit donc :

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{P}^\dagger}{\partial \bar{z}} = i \frac{\Delta^2}{\gamma u_0} \Omega \varepsilon \tilde{P}^\dagger + \frac{\partial \tilde{P}^\dagger}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{P}^\dagger}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{\nu^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \nu^2} + \nu \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \varepsilon \partial \nu},$$

où $\tilde{P}^\dagger = \tilde{P}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}, \Omega)$ et avec la condition $\tilde{P}^\dagger(\varepsilon = 1) = 0$.

Nous limiterons ici cette étude fréquentielle à une excitation lambertienne qui correspond en théorie modale à une répartition uniforme de puissance sur tous les modes, ce qui se traduit en théorie des rayons par l'excitation :

$$(18) \quad \tilde{P}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z} = 0, \Omega) = 1,$$

sur le domaine de définition de la figure 2.

Ce type d'excitation indépendant du paramètre ν a pour effet d'éliminer les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (17), comme il a été fait précédemment.

L'intégration numérique de l'équation (17) est réalisée en posant :

$$(19) \quad \tilde{P}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}, \Omega) = \tilde{R}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}, \Omega) + i\tilde{I}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{z}, \Omega),$$

et en résolvant la paire d'équations en \tilde{R} et \tilde{I} déduites de l'équation (17) par une méthode analogue à celle utilisée dans le cas où P^\dagger est indépendant du temps.

La puissance à l'extrémité d'une fibre de longueur $\bar{z} = \bar{L} = \frac{\gamma z}{\Delta}$ s'exprime alors par :

$$(20) \quad \tilde{P}(\bar{L}, \Omega) = (\tilde{R}^2(\bar{L}, \Omega) + \tilde{I}^2(\bar{L}, \Omega))^{1/2},$$

avec :

$$\tilde{R}(\bar{L}, \Omega) = \int_{\varepsilon, \nu} Z_n(\varepsilon, \nu) \tilde{R}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{L}, \Omega) d\varepsilon d\nu,$$

$$\tilde{I}(\bar{L}, \Omega) = \int_{\varepsilon, \nu} Z_n(\varepsilon, \nu) \tilde{I}^\dagger(\varepsilon, \nu, \bar{L}, \Omega) d\varepsilon d\nu.$$

Compte tenu du fait que \tilde{R}^\dagger et \tilde{I}^\dagger sont indépendants de ν dans le cas d'une excitation lambertienne et que :

$$(21) \quad \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} Z_n(\varepsilon, \nu) d\nu = \frac{\pi}{4};$$

on a simplement, à un facteur constant près

$$(22) \quad \tilde{R}(\bar{L}, \Omega) = \int_0^1 \tilde{R}^\dagger(\varepsilon, \bar{L}, \Omega) d\varepsilon,$$

$$\tilde{I}(\bar{L}, \Omega) = \int_0^1 \tilde{I}^\dagger(\varepsilon, \bar{L}, \Omega) d\varepsilon.$$

Pour de petites valeurs de $\bar{L} = \gamma z / \Delta$ qui correspondent à une faible densité spectrale de microcourbures, nous traçons (Fig. 5) l'évolution de pertes de transmission en bande de base en fonction de la fréquence angulaire normalisée $\bar{\Omega} = (\Omega \Delta / u_0) z$; où u_0 est la vitesse de groupe sur l'axe de la fibre. La courbe $\bar{L} = 0$ ($\gamma = 0$) donne la réponse de la fibre en l'absence de microcourbures, on a alors :

$$(23) \quad \tilde{P}(\bar{\Omega}) = \frac{\sin(\bar{\Omega}/2)}{\bar{\Omega}/2}.$$

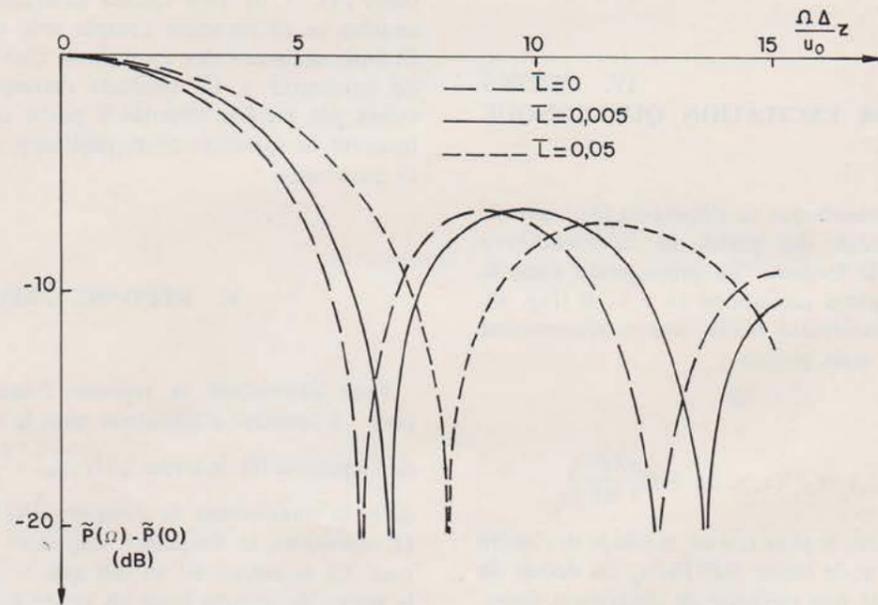


FIG. 5. — Pertes en décibel en fonction de la fréquence en bande de base Ω pour différentes valeurs de la microcourbure (les pertes de microcourbures à la fréquence $\Omega = 0$ sont soustraites). L'échelle horizontale est $\Omega \Delta z / u_0$ où u_0 est la vitesse de groupe dans le milieu du cœur de la fibre. Le paramètre est $\bar{L} = \gamma z / \Delta$, z longueur de la fibre, γ densité spectrale de la microcourbure. Pour $\gamma = 0$ ($\bar{L} = 0$) la réponse temporelle est rectangulaire et la réponse fréquentielle en $\sin(\bar{\Omega}/2)/(\bar{\Omega}/2)$.

FIG. 5. — Losses in decibel as a function of the baseband frequency Ω for various values of the microbending (losses at $\Omega = 0$ are subtracted). The horizontal scale is $\Omega \Delta z / u_0$, where u_0 denotes the fiber core group velocity. The parameter is $\bar{L} = \gamma z / \Delta$, where z is the fiber length and γ the spectral density of the curvature process. For $\gamma = 0$ ($\bar{L} = 0$) the impulse response is rectangular and the frequency response is $\sin(\bar{\Omega}/2)/(\bar{\Omega}/2)$.

A mesure que \bar{L} croît, on note l'augmentation de la bande passante du système de transmission. Cet effet favorable est bien entendu accompagné d'une accentuation des pertes totales.

Pour de plus grandes valeurs de \bar{L} , les résultats numériques sont présentés avec des échelles différentes. Nous avons tracé sur la figure 6 les pertes en décibels

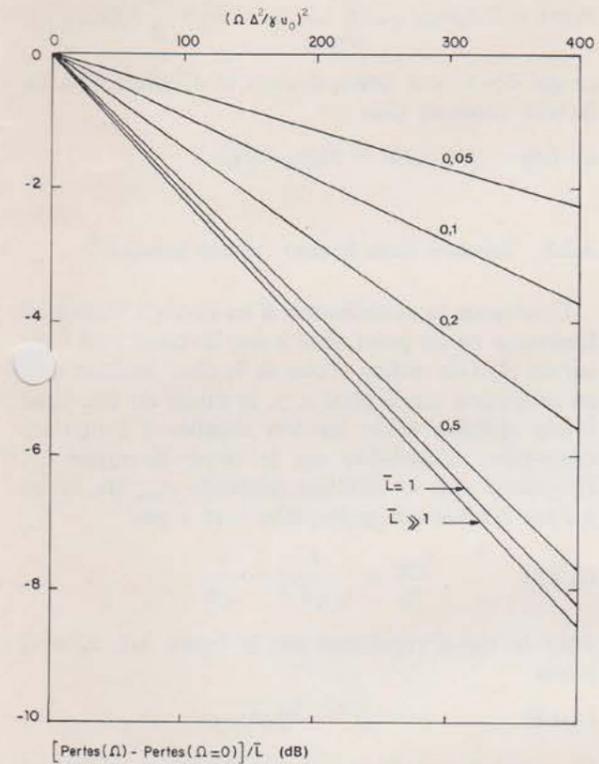


FIG. 6. — Continuation de la figure 5 pour de plus grandes valeurs de la microcourbure. Sur l'échelle verticale, les pertes sont divisées par $\bar{L} = \gamma z / \Delta$. L'échelle horizontale est $(\Omega \Delta^2 / \gamma u_0)^2$. Dans la limite $\bar{L} \rightarrow \infty$, la réponse temporelle et fréquentielle est gaussienne. Donc la courbe est une droite. De la pente de cette droite on déduit le facteur $\mathcal{R}^2 \mathcal{L} = 0,74$ dB du texte.

FIG. 6. — Continuation of Figure 5 for larger values of microbending. On the vertical scale, the losses are divided by $\bar{L} = \gamma z / \Delta$. The horizontal scale is $(\Omega \Delta^2 / \gamma u_0)^2$. In the limit $\bar{L} \rightarrow \infty$ the impulse and frequency response is gaussian. Thus the curve is a straight line. From the slope one gets the factor $\mathcal{R}^2 \mathcal{L} = 0.74$ dB.

divisées par \bar{L} en fonction de $(\bar{\Omega} / \bar{L})^2$ pour différentes valeurs de \bar{L} . L'intérêt de cette représentation est que, pour $\bar{L} \gg 1$ la réponse impulsionnelle (et donc fréquentielle) est gaussienne et la courbe devient une droite de pente constante. Celle-ci permet le calcul du facteur d'amélioration

$$(24) \quad \mathcal{R} = \frac{\sigma}{\sigma_0} < 1,$$

qui exprime le rapport des largeurs des réponses impulsionnelles avec (σ) et sans (σ_0) microcourbures.

Pour une excitation de la fibre de longueur L par une impulsion brève d'énergie unité, on détermine :

$$(25 a) \quad \sigma_0^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta}{u_0} \right)^2 L^2,$$

$$(25 b) \quad \sigma^2 = \frac{m}{2,15} \frac{\gamma}{\Delta} L,$$

avec m pente de la courbe $\bar{L} \gg 1$ de la figure 6.

Le produit de \mathcal{R}^2 par les pertes \mathcal{L} de microcourbure est alors :

$$(26) \quad \mathcal{R}^2 \mathcal{L} = 0,74 \text{ dB}.$$

La figure 7 résume pour une fibre de longueur fixée à 10 km l'évolution des performances en réponse

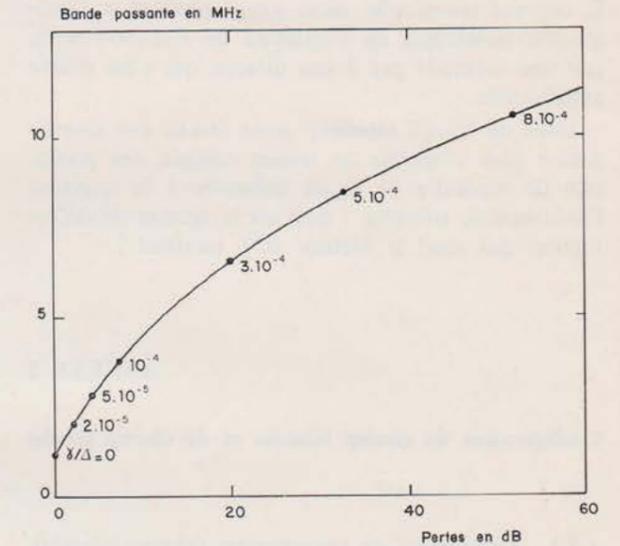


FIG. 7. — Bande passante (B.P.) à 3 dB en puissance optique (correspondant à 6 dB en puissance en bande de base) en fonction des pertes de microcourbure pour différentes valeurs de la densité spectrale γ . On voit que si une perte de 10 dB est tolérée, la bande passante peut être augmentée de 1,2 à 4,4 MHz.

FIG. 7. — Band width (B.P.) at 3 dB in optical power (6 dB at baseband) as a function of the microbending loss for different values of the spectral density γ and a lambertian excitation. If a 10 dB loss is tolerated, the band width may be increased from 1.2 to 4.4 MHz.

à une excitation lambertienne. La bande passante à 3 dB est donnée en fonction des pertes de microcourbure avec, en paramètre, γ / Δ . D'après cette courbe, on voit que si l'on peut tolérer une augmentation de pertes optiques de 10 dB, la bande passante passe de 1,2 à 4,4 MHz, ce qui est appréciable.

Insistons sur le fait que le spectre de microcourbure uniforme a été choisi pour des raisons de simplicité mathématique ; il est très loin de l'optimum.

VI. CONCLUSION

Les théories de la propagation dans les fibres multimodales à saut d'indice données précédemment

dans la littérature sont basées sur des approximations dont la valeur reste à démontrer. Nous avons donc analysé à nouveau le problème, cette fois sur la base d'une théorie qui est rigoureuse dans le cadre de l'approximation WKB. Nous avons essayé de clarifier au maximum le cas de la fibre sans perte soumise à des microcourbures à corrélation microscopique, avant d'aborder des situations plus complexes. Les coefficients de l'équation de diffusion sont calculés de façon analytique et cette équation est résolue de façon exacte pour le mode statistique fondamental. De même, des expressions analytiques simples ont été obtenues pour le champ proche et lointain. Pour la réponse temporelle, nous avons procédé à l'intégration numérique de l'équation de Fokker-Planck, par une méthode pas à pas directe, qui s'est avérée satisfaisante.

Dans un travail ultérieur, nous ferons une investigation plus complète en tenant compte des pertes, afin de répondre de façon définitive à la question fondamentale suivante : quel est le spectre de déformation qui rend le facteur $\mathcal{R}^2 \mathcal{L}$ minimal ?

ANNEXE I

Configuration du champ lointain et du champ proche

A.I.1. Diagramme de rayonnement (champ lointain).

Le paramètre normalisé ε introduit dans l'équation (2) peut être défini en fonction de l'angle θ du rayon avec l'axe

$$(A-I.1) \quad \varepsilon = (\theta/\theta_c)^2,$$

où θ_c est l'angle limite de réflexion totale (égale à $\sqrt{2\Delta}$). Cette relation est indépendante du paramètre ν .

Si on néglige la réfraction à l'extrémité de la fibre et si on désigne par $I(\theta)$ l'intensité lumineuse dans la direction θ à grande distance, la puissance lumineuse reçue dans la couronne entre θ et $\theta + d\theta$ (Fig. A-I.1) qui est égale à $I(\theta) 2\pi\theta d\theta$ doit être égale à $P(\varepsilon) d\varepsilon$ où $P(\varepsilon)$ représente l'intégrale de $P(\varepsilon, \nu)$ par rapport à ν . Nous avons donc, à une constante près

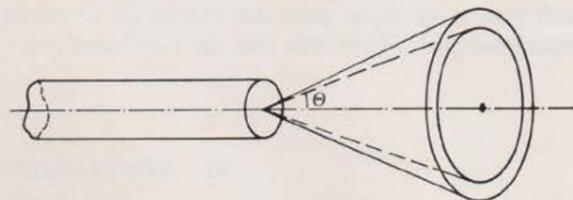


FIG. A-I.1. — Définition du diagramme de rayonnement (champ lointain).
Definition of the radiation pattern (far field).

$$(A-I.2) \quad I(\theta) = \int_0^{\theta/\theta_c} P((\theta/\theta_c)^2, \nu) d\nu,$$

puisque ν est compris entre $-\sqrt{\varepsilon}$ et $+\sqrt{\varepsilon}$.

Pour les modes statistiques donnés par l'équation (11), nous avons, en intégrant

$$(A-I.3) \quad P_m(\varepsilon) = 2 J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}) \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} Z_n(\varepsilon, \nu) d\nu = \frac{\pi}{2} J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}),$$

ce qui donne une intensité dans la direction θ , à un facteur constant près

$$(A-I.4) \quad I_m(\theta) = J_0(u_{0m} \theta/\theta_c).$$

A.I.2. Intensité dans le cœur (champ proche).

Examinons la contribution d'un rayon à l'intensité lumineuse en un point situé à une distance r de l'axe sur un plan de section droite de la fibre, sachant qu'en projection sur le plan x, y , le rayon est une ligne brisée réfléchiée selon les lois usuelles à l'interface cœur-gaine, c'est-à-dire sur le cercle de rayon r_c . Rappelons que la distance minimale r_{min} du rayon à l'axe est liée aux paramètres ν et ε par

$$(A-I.5) \quad \frac{r_{min}}{r_c} = \frac{l}{r_c \sqrt{2E}} = \frac{\nu}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Pour le rayon représenté sur la figure A-I.2, nous avons

$$(A-I.6) \quad y = \sqrt{r^2 - r_{min}^2(\varepsilon, \nu)},$$

la contribution à l'intensité en r du rayon caractérisé par ε et ν , est inversement proportionnelle au temps passé par le rayon dans la couronne comprise entre

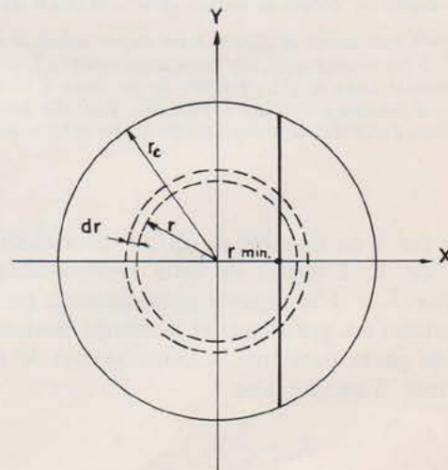


FIG. A-I.2. — Section droite de la fibre pour le calcul de la distribution radiale d'intensité relative à un rayon de paramètres ε, ν spécifiés.
Cross-section of the fiber, for calculating the radial intensity distribution relating to a specific ray (ε, ν).

r et $r + dr$. Donc

$$(A-I.7) \quad I_{\varepsilon, \nu}(r) = \frac{dy}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_{min}^2(\varepsilon, \nu)}},$$

soit encore :

$$(A-I.8) \quad I_{\varepsilon, \nu}(r) = \frac{r/r_c}{\sqrt{(r/r_c)^2 - \nu^2/\varepsilon}}.$$

L'intensité totale $2\pi r I(r)$ à une distance r doit tenir compte de la densité de probabilité $P_m(\varepsilon, \nu)$ et de tous les rayons susceptibles d'atteindre le cercle de rayon r , c'est-à-dire de tous les rayons tels que $r_{min} \leq r$, ou encore

$$(A-I.9) \quad \nu \leq \frac{r}{r_c} \sqrt{\varepsilon},$$

r étant ici un paramètre fixé à l'avance.

Ceci revient à intégrer l'expression $P_m(\varepsilon, \nu) I_{\varepsilon, \nu}(r)$ sur le domaine D hachuré de la figure A-I.3, et à diviser le résultat par $2\pi r$. A un facteur constant près, nous avons

$$(A-I.10) \quad I'_m(r) = \frac{1}{r} \int_D \frac{r}{\sqrt{(r/r_c)^2 - \nu^2/\varepsilon}} P_m(\varepsilon, \nu) d\varepsilon d\nu = \int_D \left[\frac{1 - \nu^2/\varepsilon}{\varepsilon((r/r_c)^2 - \nu^2/\varepsilon)} \right]^{1/2} J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}) d\varepsilon d\nu.$$

Pour évaluer cette intégrale, posons

$$(A-I.11) \quad \sin \theta = \frac{\nu}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{r_c}{r},$$

l'équation (A-I.10) s'écrit :

$$(A-I.12)$$

$$I'_m(r) = \int_0^1 J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}) d\varepsilon \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \sin^2 \theta\right)^{1/2} d\theta.$$

Notons que

$$(A-I.13)$$

$$\int_0^1 J_0(u_{0m} \sqrt{\varepsilon}) d\varepsilon = 2 \int_0^1 x J_0(u_{0m} x) dx = \frac{2}{u_{0m}} J_1(u_{0m}) = K_m,$$

$$(A-I.14)$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \sin^2 \theta\right)^{1/2} d\theta = E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{r_c}\right),$$

où $E(\dots)$ représente une intégrale elliptique de seconde espèce. Donc, à un facteur constant près

$$(A-I.15) \quad I'_m(r) = E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{r_c}\right).$$

L'évolution du champ proche avec r/r_c est donnée figure 3 b.

ANNEXE II

Propriété de l'équation en P

L'équation de Fokker-Planck inverse utilisée dans le texte est

$$(A-II.1)$$

$$\frac{\partial P^\dagger}{\partial z} = \frac{\partial P^\dagger}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{\nu^2}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \nu^2} + \nu \frac{\partial^2 P^\dagger}{\partial \varepsilon \partial \nu}.$$

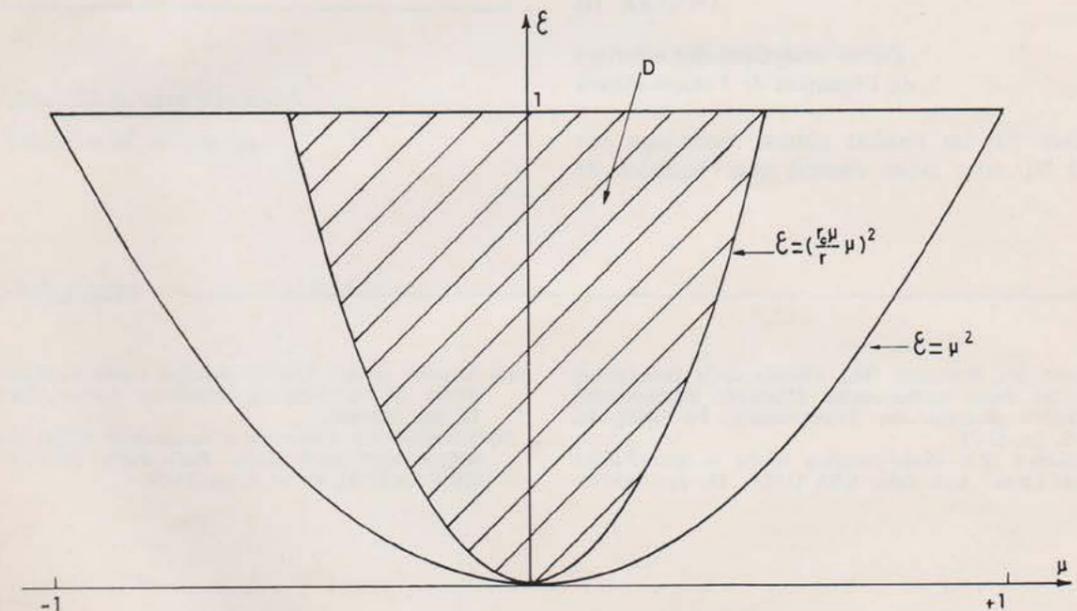


FIG. A-I.3. — Domaine d'intégration dans le plan ε, ν pour le calcul de l'intensité optique en fonction de r dans le cœur de la fibre. Le résultat de cette intégration est donné figure 3 b.

Domain of integration in the ε, ν plane for calculating the total radial intensity distribution. The result is shown in figure 3 b.

tandis que l'équation adjointe (dite de F P directe) est

$$(A-II.2) \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon P) + \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \left(\left(1 + 2 \frac{\nu^2}{\varepsilon} \right) P \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial \nu} (\nu P).$$

Nous avons montré en général que $P(\varepsilon, \nu, z) = Z_n(\varepsilon, \nu) P^\dagger(\varepsilon, \nu, z)$ et nous pouvons vérifier ici ce résultat en utilisant l'expression de $Z_n(\varepsilon, \nu)$ donnée équation (3 b). La vérification, longue mais sans difficulté, ne sera pas détaillée ici.

Nous avons fait l'observation curieuse suivante : supposons que P ne dépende pas de ν . Nous obtenons en faisant $\partial P / \partial \nu, \partial^2 P / \partial \nu^2 = 0$ dans l'équation (A-II. 2), une équation pour $P(\varepsilon, z)$ qui ne dépend pas de ν , ce qui est inattendu.

$$(A-II.3) \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{3\varepsilon} P + 2 \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial \varepsilon^2}.$$

Analytiquement, les solutions stationnaires de l'équation (A-II.3) s'écrirait :

$$(A-II.4) \quad P_m(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} J_{i\sqrt{3}} \left(2 \left(\lambda_m \frac{\Delta}{\gamma} \varepsilon \right)^{1/2} \right).$$

Ces solutions n'ont pas de rapport évident avec celles qui ont été données dans le texte, car si P ne dépend pas de ν , P^\dagger en dépend, et vice-versa. La signification physique de cette série de solutions nous échappe donc. Il n'empêche que si nous avons une distribution initiale $P(\varepsilon, z = 0)$, indépendante de ν , P restera indépendante de ν en tous z .

ANNEXE III

Forme analytique des solutions de l'équation de Fokker-Planck

Motivés par un résultat obtenu récemment par Shatrov [4], nous avons observé que l'équation de

Fokker-Planck (A-II. 2) est séparable et peut être résolue analytiquement. On fait le changement de variables :

$$(A-III.1) \quad \varepsilon = \alpha_1^2; \quad \nu = \alpha_1 \sin \alpha_2.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(A-III.2) \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{3\alpha_1^2} P + \frac{3}{4\alpha_1} \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{12\alpha_1^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_2^2}.$$

Compte tenu des conditions aux limites, la solution générale s'écrit pour les modes statistiques :

$$(A-III.3) \quad P(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1} J_{\bar{\nu}}(2\sqrt{\sigma} \alpha_1) \cos [m\alpha_2 + (m-1)\pi/2],$$

$$\bar{\nu} = [(m^2 - 1)/3]^{1/2}; \quad J_{\bar{\nu}}(2\sqrt{\sigma}) = 0,$$

$$\sigma = \lambda \Delta / \gamma.$$

Les pertes de microcourbure correspondants à ces modes sont donnés par le tableau A III-I.

($\alpha = 4,34 \sigma \gamma / \Delta$ dB par unité de longueur).

Tabl. A III-I

Pertes de microcourbure pour les premiers modes statistiques

m	1	2	3	4	5
$\bar{\nu}$	0	1	1,63	2,24	2,83
$\alpha \Delta / \gamma$ dB	6,27	16	23	32	41
	33	53	68	83	98
	81	112	133		

Manuscrit reçu le 23 juillet 1979,

accepté le 26 novembre 1979.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNAUD (J.), ROUSSEAU (M.). Théorie de la propagation dans les fibres multimodales déformées aléatoirement. I. Théorie générale. *Ann. Télécommunic.*, Fr. (1980), 35, n° 1-2, pp. 61-73.
 [2] OLSHANSKY (R.). Mode coupling effects in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, USA (1975), 14, pp. 935-945.

[3] ARNAUD (J. A.). Use of principal mode numbers in the theory of microbending. *Electronic Letters*, GB (1978), 14, pp. 663-664.
 [4] SHATROV (A.). Losses in a multimodal double-layer fiber with random axial bends. *Radio Engrs Electron. Phys.*, GB (juin 1978), 23 n° 6, pp. 11-20.

où les dérivées sont évaluées à $m_1 = \bar{m}_1, m_2 = \bar{m}_2$ et sont des fonctions de z . Nous substituons maintenant les développements de d et Q en (A-II 6) et (A-II 7), respectivement, dans l'équation des puissances couplées (A-II 3), où la somme sur m_1, m_2 est remplacée par une somme sur s_1, s_2 . En raison de la symétrie, (A-II 5), il suffit d'effectuer la sommation sur les valeurs de s_1, s_2 représentées par des points sur la figure A-II 1.

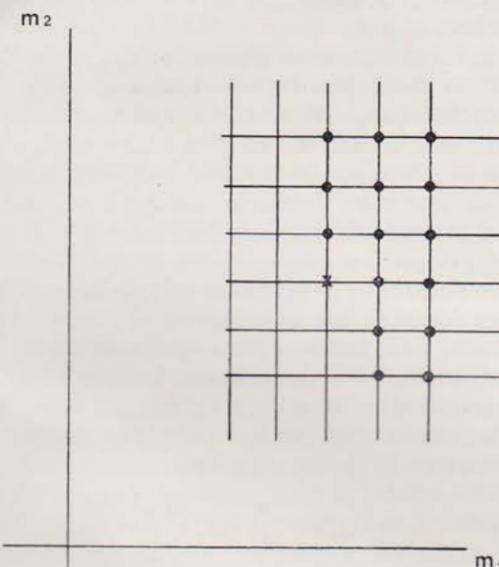


FIG. AII-1. — Plan du nombre des modes m_1, m_2 . En raison de la symétrie des coefficients de couplage en puissance, il suffit de considérer le couplage du mode représenté par une croix avec les modes représentés par des points.

FIG. AII-1. — Plane of the mode numbers m_1, m_2 . Because of the symmetry of the power-coupling coefficients it is sufficient to consider the coupling of the modes shown by a cross with those modes shown by black points.

Cette sommation réduite est représentée par des crochets autour de s_1, s_2 . En nous limitant aux termes du second ordre nous avons

$$(A-II 8) \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \sum_{s_1, s_2} \left(d_{s_1, s_2} + \frac{\partial d_{s_1, s_2}}{\partial m_1} \frac{s_1}{2} + \frac{\partial d_{s_1, s_2}}{\partial m_2} \frac{s_2}{2} \right) \times \left(\frac{\partial Q}{\partial m_1} s_1 + \frac{\partial Q}{\partial m_2} s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1 \partial m_2} s_1 s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_2^2} s_2^2 \right) + \left(d_{s_1, s_2} - \frac{\partial d_{s_1, s_2}}{\partial m_1} \frac{s_1}{2} - \frac{\partial d_{s_1, s_2}}{\partial m_2} \frac{s_2}{2} \right) \times \left(-\frac{\partial Q}{\partial m_1} s_1 - \frac{\partial Q}{\partial m_2} s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1^2} s_1^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial m_1 \partial m_2} s_1 s_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial m_2^2} s_2^2 \right).$$

Après simplification nous obtenons

$$(A-II 9) \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial m_1} D_{11} \frac{\partial Q}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial m_1} D_{12} \frac{\partial Q}{\partial m_2} + \frac{\partial}{\partial m_2} D_{21} \frac{\partial Q}{\partial m_1} + \frac{\partial}{\partial m_2} D_{22} \frac{\partial Q}{\partial m_2};$$

si nous posons

$$D_{11} = \sum_{[s_1, s_2]} d_{s_1, s_2} s_1^2,$$

$$(A-II 10) \quad D_{12} = D_{21} = \sum_{[s_1, s_2]} d_{s_1, s_2} s_1 s_2,$$

$$D_{22} = \sum_{[s_1, s_2]} d_{s_1, s_2} s_2^2.$$

Dans la limite considérée des modes denses, et à condition que les séries convergent, les termes d'ordre plus élevé tendent vers zéro. Contrairement à ce qui a été affirmé par Marcuse [7], il n'est nullement nécessaire de négliger le couplage entre modes non adjacents pour obtenir une équation aux dérivées partielles (au lieu d'une équation intégral-différentielle). Nous avons obtenu une équation de Fokker-Planck qui est autoadjointe puisque $D_{12} = D_{21}$.

Notons que les coefficients de diffusion D_{ij} peuvent être écrits

$$(A-II 11) \quad D_{ij}(m_1, m_2) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \langle [m_i(\Delta z) - m_i(0)] \times [m_j(\Delta z) - m_j(0)] \rangle / \Delta z,$$

si, pour n'importe quelle fonction régulière $a(m_1, m_2)$, on pose

$$(A-II 12) \quad \langle a(m_1, m_2) \rangle = \iint_S a(m_1, m_2) Q(m_1, m_2, z) dm_1 dm_2,$$

Q étant nul, ou de flux nul, sur le contour C de la surface S définie dans le plan m_1, m_2 .

On voit que pour une déformation quelconque les coefficients de diffusion sont donnés par une somme double. Dans le cas de fibres ayant la symétrie de révolution les indices m_1, m_2 sont remplacés par les indices μ, α qui représentent respectivement les nombres azimutaux et radiaux. Dans le cas des microcourbures, la perturbation est, comme on l'a vu dans le texte (3)

$$(A-II 13) \quad C_x = Cr(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2.$$

Pour évaluer le couplage, on intègre le produit des champs des modes et la perturbation C_x , il en résulte que seuls sont couplés les modes dont les ordres azimutaux diffèrent d'une unité. La double somme de (A-II 10) se réduit alors à une simple somme. La correspondance entre les nombres de mode α, μ et les paramètres de rayons l, l est donnée par la méthode WKB.

$$(A-II 14) \quad \alpha = l/\lambda,$$

$$\mu = 2\pi l/\lambda; \quad \lambda = \lambda_0/n_0$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Par ailleurs, l'énergie E du rayon est relié à la constante de propagation β par

$$(A-II 15) \quad \beta = 2\pi(1 - E)/\lambda.$$

Il est donc facile de réécrire l'équation (A-II 9) en utilisant comme variables indépendantes I et l au lieu de x et μ . On obtient ainsi une équation auto-adjointe de la forme donnée dans le texte.

ANNEXE III

Discussion des propriétés de l'équation de Fokker-Planck

La formule (22) du texte est tout à fait générale puisqu'elle est applicable à une fibre ayant un profil d'indice quelconque et une distortion quelconque (mais lente par rapport à la longueur d'onde dans le milieu afin qu'une théorie des rayons soit applicable. Dans le cas de diffuseurs de dimension comparable à la longueur d'onde, le rayonnement ne se fait pas au voisinage étroit de la direction de l'onde incidente, et il faut par conséquent utiliser une équation intégral-différentielle). Cette formule (22) est établie en annexe II à l'aide d'une théorie modale. Il est peut être utile de rappeler que la forme classique de l'équation de Fokker-Planck est

$$(A-III 1) \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial I} [A(I)Q] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} [B(I)Q],$$

où nous avons considéré une seule variable, I , pour simplifier, au lieu des deux variables (I, l) du texte. Il est clair que la forme

$$(A-III 2) \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial I} \left[D(I) \frac{\partial Q}{\partial I} \right],$$

que nous avons obtenue est un cas spécial de la forme générale (A-III 1) avec

$$(A-III 3) \quad B(I) = 2 D(I); \quad A(I) = dD(I)/dI.$$

Un rayon est défini par sa position x et sa pente \dot{x} , c'est-à-dire par un point dans l'espace des phases. Dans cet espace, il décrit en fonction de z une courbe fermée dont la surface est l'action I (égale à λm en théorie modale, si m est l'ordre du mode et λ la longueur d'onde dans le milieu, à un terme $1/2$ près, qui est sans importance ici). Il faut bien voir que la valeur de I reste pratiquement inchangée pour une distance axiale très supérieure à la période z du rayon en raison de la petitesse des déformations considérées. Si donc nous considérons une très légère fluctuation dI de I , nous obtiendrons des rayons ayant toutes les valeurs de x, \dot{x} compatibles avec la valeur de I choisie, car ils ont le temps de s'étaler le long de la trajectoire dans l'espace des phases pour toute valeur de z . On peut aussi invoquer le fait que les rayons considérés ne sont que des abstractions et qu'il est plus physique de considérer des modes, qui doivent être représentés, dans l'approximation WKB, non pas par des rayons isolés, mais par des congruences de rayons uniformément distribués le long d'une trajectoire de l'espace

des phases. Il faut reconnaître qu'il y a à un passage assez délicat entre les concepts de rayon et de mode, qui est justifié par l'accord final, au niveau statistique, entre les méthodes de rayon et les méthodes ondulatoires. Les mêmes difficultés sont d'ailleurs soulignées dans les traités de mécanique statistique classique et quantique. Le but de cette discussion est de montrer qu'il est correct de caractériser un rayon seulement par le paramètre I , et l'évolution lente de ce paramètre en fonction de z , plutôt que par l'évolution des deux paramètres x et \dot{x} .

Nous avons à plusieurs reprises souligné le fait que l'équation de Fokker-Planck obtenue (A-III 2) est auto-adjointe, lorsqu'elle est exprimée en fonction de la variable indépendante I . Précisons ici le sens de cette remarque. Une équation est dite formellement auto-adjointe si elle est inchangée lorsque l'on inverse l'ordre des opérateurs ($\partial/\partial I, D(I), \partial/\partial I$ dans le cas présent) et que l'on change le signe des opérateurs de dérivation ($\partial/\partial I \rightarrow -\partial/\partial I$ dans le cas présent). Pour qu'une équation soit auto-adjointe, il faut que les conditions aux limites soient également adjointes. Quand ces conditions sont réunies, les solutions sont orthogonales dans un sens qui va être précisé par un calcul explicite. Les modes statistiques associés à l'équation (A-III 2) sont définis par

$$(A-III 4) \quad -\lambda_m Q_m = \frac{d}{dI} D(I) \frac{dQ_m}{dI},$$

avec les conditions aux limites

$$(A-III 5) \quad D(I) \frac{dQ_m}{dI} = 0, I = 0; \quad Q_m(I_{\max}) = 0.$$

Démontrons la relation d'orthogonalité

$$(A-III 6) \quad \int_0^{I_{\max}} Q_m(I) Q_n(I) dI = 0, \quad m \neq n.$$

Pour établir ce résultat, multiplions l'équation (A-III 4) par Q_n , écrivons une relation similaire en échangeant m et n , retranchons membre à membre et intégrons sur I . Nous obtenons

$$(A-III 7) \quad (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{I_{\max}} Q_m Q_n dI = \int_0^{I_{\max}} \left[Q_n \frac{d}{dI} \left(D \frac{dQ_m}{dI} \right) - Q_m \frac{d}{dI} \left(D \frac{dQ_n}{dI} \right) \right] dI.$$

Le membre de droite est nul par intégration par parties en raison des conditions aux limites (A-III 5). Donc l'équation (A-III 6) est établie si $\lambda_m \neq \lambda_n$.

Notons en outre que si nous choisissons comme variable indépendante E au lieu de I , avec $dI/dE = Z$, et utilisons comme variable dépendante, soit

$$(A-III 8) \quad P^+(E) = Q(I(E)),$$

soit

$$(A-III 9) \quad P^+(E) dE = Q(I(E)) dI,$$

la relation d'orthogonalité devient

$$(A-III 10) \quad \int_0^{E_{\max}} P_m^+(E) P_n(E) dE = 0, \quad m \neq n.$$

Nous avons vu dans le texte que, pour le cas des microcourbures, le coefficient de diffusion D est nul en $I = 0$ (on peut conjecturer que ce résultat est général). Il en résulte que pour satisfaire la condition de l'équation (A-III 5) qui exprime le fait qu'il n'y a pas de flux de puissance (ou de probabilité) vers les I négatif, il n'est pas nécessaire d'imposer la condition $dQ/dI = 0$ en $I = 0$, si $Q(I)$ est régulier en ce point. La condition essentielle est que $Q = 0$ lorsque I atteint la valeur I_{\max} au delà de laquelle les pertes sont nulles (mais pas nécessairement infinies). Contrairement à ce qui a parfois été dit dans la littérature, nous pensons que la condition $Q(I = I_{\max}) = 0$ est la condition à la limite correcte à appliquer, dans la limite des faibles déformations ($\gamma Z \rightarrow 0$), même si les pertes ne sont pas infinies pour $I > I_{\max}$. Rappelons que nous supposons les pertes nulles, en l'absence de déformation, lorsque $I < I_{\max}$. On peut évidemment se demander si dans les cas pratiques où les pertes de microcourbure sont de l'ordre du décibel par kilomètre on peut considérer que la déformation est suffisamment faible pour autoriser l'approximation $Q(I = I_{\max}) = 0$. Nous pensons que c'est le cas pour les fibres à deux dimensions car les rayons réfractés ont des pertes qui augmentent très vite lorsque I excède I_{\max} , mais ce n'est peut-être pas le cas pour les fibres ayant la symétrie circulaire car certains rayons ont des pertes très faibles. Quoi qu'il en soit, nous ne considérons ici que la limite mathématique $\gamma Z \rightarrow 0$. Nous avons montré que le rapport $Q(I_{\max})/Q(0)$ tend vers zéro comme une puissance $2/5$ de γ . Les détails du calcul cependant ne seront pas donnés ici. Une explication physique

plausible de ce résultat est la suivante : quand la déformation est très faible, une augmentation de, disons un pour cent, de I nécessite une distance axiale très grande. Sur cette distance, les pertes totales sont très grandes même si les pertes par unité de longueur sont finies, et en fait tendent vers l'infini quand γ tend vers zéro.

Avant de conclure cette annexe, essayons de préciser la notion de modes statistiques. Ces modes apparaissent naturellement parce que les coefficients de diffusion D sont indépendants de z , par séparation des variables. Ils sont obtenus en posant : $Q(I, z) = Q_m(I) \exp(-\lambda_m z)$, $Q_m(I)$ étant la fonction propre, et λ_m la valeur propre (ou perte de microcourbure). On obtient ainsi toute une suite de modes statistiques, dont seul le premier est partout positif. Certains auteurs en ont conclu que les modes statistiques supérieurs n'avaient pas d'existence physique individuelle, mais pouvaient être utilisés seulement dans des combinaisons telles que la somme soit partout positive. Nous pensons que tous les modes statistiques ont une existence physique individuelle, si l'on tient compte du fait que la gaine d'une fibre peut transporter une puissance optique non nulle. Mathématiquement, cela revient à ajouter aux solutions obtenues une constante telle que la puissance soit partout positive. Ce concept pourrait d'ailleurs donner lieu à une méthode de mesure originale, dans laquelle on exciterait à l'entrée de la fibre la gaine (considérée comme un réservoir presque inépuisable de puissance optique), mais non le cœur. On pourrait alors étudier la façon dont le cœur se remplit de puissance optique sous l'influence des déformations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERREMAN (D. W.). Growth of oscillations of a ray about the irregularity wavy axis of a lens light guide. *Bell Syst. tech. J.* USA (1965), **44**, pp. 2117-2132.
- [2] BOOKER (H. G.), WALKINSHAW (W.). Meteorological factors in radio-wave propagation. *Physical. Soc.* Londres (1946).
- [3] KAO (K. C.), DAVIES (T. W.). Spectrophotometric studies of ultra low losses optical glasses. I : single beam method. *J. Scient. Inst.* GB (1968), **1**, (sér. 2), pp. 1063-1068.
- [4] MIYA (T.), TERUNUMA (Y.), HOSAKA (T.), MIYASAITA (T.). Ultimate low-loss simple-mode fiber at 1.55 μ m. *Electronic letters*, GB (1979), **15**, pp. 106-108.
- [5] ARNAUD (J.). Use of principal mode numbers in the theory of microbending. *Electron. letters*, GB (1978), **14**, pp. 663-664.
- [6] PERSONICK (S.). Baseband linearity and equalization in fiber optic digital communication systems. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1973), **52**, pp. 1175-1194.
- [7] MARCUSE (D.). Theory of dielectric optical waveguide, *Acad. Press*, New York (1974).
- [8] SHATROV (A. D.). Ray statistics in multimode irregular optical fibres. *Radiotekhnika*, URSS (1977), **20**, pp. 1153-1164.
- [9] EVE (M.), HANNAY (J. H.). Ray theory of random coupling in an optical fiber waveguide. *J. Opt. Quant. Electr.*, USA (1976), **8**, pp. 503-512.
- [10] CLAPEAU (M.), ARNAUD (J.). Bandwidth of step-index fibers with microbending. *Arch. Electron. Ubertrag-Tech.*, Deutsch. (1979), **33**, pp. 441-442.
- [11] YOUNG (D.). Model for relating coupled power equations. *Bell Syst. tech. J.*, USA (1963), **42**, pp. 2761-2764.
- [12] VAN HOVE. The approach to equilibrium in quantum statistics. *Physica*, Netherl. (1957), **26**, pp. 441.
- [13] MARCUSE (D.). Coupled power equations for lossy fibers. *Appl. Opt.*, USA (1978), **17**, pp. 3232-3237.