A.4

point 80 en optoélectronique

FIBRES
COMPOSANTS
VISUALISATION

par J. Arnaud
D. Bize
B. Carquille
A. Gabet
O. Hubert
J. Lebailly
J. Marcou
G. Robert
M. Rousseau
P. C. Schultz
J.-Cl. Trouche
S. Valette
J. Vienot

Sous la coordination de J.-J. Clair

TECHNIQUE & DOCUMENTATION
11, rue Lavoisier, F 75384 PARIS Cedex 08

Introduction à la théorie des fibres optiques multimodales

Par J. Arnaud

A.4

1. Introduction

Quelques résultats essentiels concernant la transmission d'information au moyen de fibres optiques vont être présentés ici.

¶ Rappelons les développements récents. En 1968, le chercheur anglais K.C. Kao découvrit que les pertes de la silice fondue pouvaient être inférieures à 20 dB/km dans l'infrarouge proche. Peu après, les chercheurs de la Corning Glass C°, des Bell Telephon Laboratories, et d'autres laboratoires, montrèrent que des fibres, en verre ou en silice dopée, pouvaient être fabriquées avec des longueurs de plusieurs kilomètres et des pertes de l'ordre du dB/km. Des pertes de 0,2 dB/km ont même été mesurées récemment (1979) à une longueur d'onde de 1,55 µm, ce qui signifie qu'une séparation source - détecteur (sans répéteur) de plus de 100 km est possible. En raison de ces résultats relatifs aux pertes, et des progrès réalisés concernant l'étalement des impulsions optiques grâce au profilage de l'indice, il paraît maintenant probable que, dans un avenir proche, la transmission d'information par voie optique sera économiquement viable.

¶ Nous allons passer rapidement en revue certains problèmes relatifs à la transmission d'information par impulsions optiques codées dans les fibres. Puis nous poserons les notions essentielles de la théorie de la propagation dans l'approximation géométrique. L'étude détaillée sera limitée à deux problèmes fondamentaux (sections 3 et 4 respectivement) : la détermination du profil d'indice optimal et l'étude des microcourbures.

Nous nous limiterons aux fibres multimodales qui présentent le plus d'interêt pratique à l'heure actuelle. Les fibres unimodales peuvent être fabriquées de façon économique et ne souffrent pas trop des problèmes de microcourbure si le rayon du coeur est inférieur à environ 5 µm. Mais dans ce cas le raccord de deux fibres est délicat. D'autre part, la source laser doit osciller dans un seul mode transverse. Cette condition n'est réalisée que dans certains lasers disponibles commercialement.

Essayons de situer les fibres optiques par rapport aux dispositifs plus conventionnels de transmission d'information. On peut distinguer les systèmes de guidage protégés des influences atmosphériques et les systèmes de propagation en espace libre. Dans les systèmes protégés,

les pertes sont dues surtout à la conductibilité électrique finie des métaux utilisés. Ces pertes sont proportionnelles à la racine carrée de la fréquence porteuse, au moins aux fréquences basses. Dans le cas de la propagation libre, les pertes sont dues surtout à la diffraction, à la pluie et au brouillard. L'atténuation due à la pluie est proportionnelle à la fréquence porteuse jusqu'à environ 100 GHz. Elle devient ensuite constante, ou même, diminue légèrement. L'atténuation due au brouillard, négligeable aux fréquences micro-ondes, devient très importante dans l'infrarouge et le visible. La ligne bifilaire est utilisée surtout pour les communications téléphoniques, avec un débit d'information de l'ordre de 10 Kbit/s. Il peut cependant atteindre 1 Mbit/s, pour une distance entre répéteurs de l'ordre du km. Le débit des cables coaxiaux peut atteindre 300 Mbit/s grâce à l'égalisation. Le câble coaxial est utilisé dans les liaisons terrestres et dans les câbles sous-marins. Dans ce dernier cas, la distance entre répéteurs, qui était dans les premiers dispositifs d'environ 70 km ne dépasse plus 3 km. Cette réduction de la distance entre répéteurs permet l'augmentation des débits. Elle a été rendue possible par la fiabilité accrue des composants. Des débits d'information encore plus importants sont offerts par le guide millimétrique à faibles pertes (mode H_{OI} d'un guide circulaire surdimensionné). Il est utilisé à des fréquences porteuses allant de 40 à 110 GHz, la distance entre répéteurs étant de l'ordre de 30 km. Le guide millimétrique est techniquement au point mais son installation est très coûteuse. Aux fréquences optiques, les systèmes de transmission à lentilles, en verre ou à gaz, ont été abandonnés car ils requièrent des dispositifs compliqués de contrôle du faisceau optique.

Au-delà des fréquences radio, les communications à travers l'atmosphère (relais Hertziens, satellites synchrones) se font en général à 4 et 6 GHz. Le choix de ces bandes résulte d'un compromis entre les pertes de diffraction qui diminuent lorsque la fréquence augmente pour une dimension donnée d'antenne, et les pertes dues à la pluie qui, comme nous l'avons dit plus haut, augmentent avec la fréquence. La capacité globale de ces systèmes est limitée par les phénomènes d'interférence. Certains dispositifs de transmission optique dans l'espace libre ont été développés, surtout à une longueur d'onde de 10 µm. Ils sont appliqués aux communications spatiales et à des systèmes militaires spéciaux.

Venons en aux fibres de verre ou de silice. Les fibres de verre ont été utilisées depuis très longtemps pour guider la lumière dans diverses applications, en particulier en médecine (endoscopes). La longueur de ces fibres excédait rarement quelques mètres. Aujourd'hui, on peut envisager des distances de 100 km ou plus. En pratique, les pertes des fibres câblées que l'on peut se procurer sur le marché sont plutôt de l'ordre de 5 dB/km. Des pertes de 50 dB/km sont acceptables dans certaines applications, par exemple en avionique où les distances n'excèdent pas une centaine de mètres. Un débit d'information de 40 Mbit/S pour une distance entre répéteurs de 100 km a déjà été obtenu de façon reproductible et des débits de 400 Mbit/S ont été obtenus expérimentalement sur des distances de 18 km.

Les avantages, certains ou possibles, des fibres optiques par rapport aux autres systèmes de transmission, sont nombreux : faible encombrement, grande flexibilité mécanique, immunité aux interférences électriques, assez grand débit d'information, peut-être faible coût.

Pour un type de récepteur donné (détecteur PIN ou à avalanche) et une bande réceptrice donnée, une puissance optique minimale au détecteur est requise. Cette puissance minimale dépend peu du taux d'erreur spécifié ou des autres paramètres. Une fois cette puissance minimale obtenue à la réception, puissance dont le calcul est fait en tenant compte de la puissance de la source utilisée (laser ou DEL), des pertes de la fibre, des pertes de couplage, etc., il convient de s'assurer que l'étalement des impulsions n'est pas excessif. En ordre de grandeur, la largeur de l'impulsion reçue ne doit pas excéder l'inverse du débit d'information requis. L'égalisation (filtrage linéaire qui force le signal reçu à s'annuler aux temps successifs de décision) qui est utilisée couramment dans le cas de la transmission par câbles coaxiaux, s'avère peu utile dans le cas de la transmission par fibres optiques.

Les sources principales de perte (pertes du coeur) sont les impuretés, la diffusion Rayleigh en dessous de 1 µm, et la queue des résonnances infrarouges au-dessus de 1,4 µm. Mais il faut mentionner aussi:

¶ Les pertes de gaine, en particulier pour les fibres en silice recouvertes de silicone. Les pertes intrinsèques du silicone sont supérieures à 1000 dB/km, mais les pertes optiques qui en résultent peuvent être cent fois plus faibles, en ordre de grandeur, car le champ optique est principalement localisé dans le coeur de la fibre.

¶ Les pertes de microcourbure. Le revêtement plastique et le câblage déforment la fibre de façon plus ou moins aléatoire. On observe souvent au câblage un accroissement de pertes de quels dB/km.

¶ Les pertes de couplage entre la source et la fibre qui apparaissent si la source est spatialement incohérente. La plupart des DEL (Diodes Emettrices de Lumière) émettent plus de modes que les fibres optiques ne sont habituellement capables d'en transporter. Il en résulte une perte qui peut dépasser 15 dB. Cette perte est réduite lorsque la fibre a un grand saut d'indice relatif Δ, par exemple $\Delta \approx 0.04$. Cependant, pour de telles fibres, l'étalement d'impulsions est grand ou critique.

¶ Les pertes au raccord entre fibres. Ces raccords sont inévitables en pratique. Pour obtenir des pertes faibles il faut une bonne préparation des extrémités de la fibre et un bon alignement géométrique. Ce problème est assez bien résolu. En particulier le raccord par fusion (fusion splicing) est particulièrement satisfaisant.

¶ L'étalement des impulsions optiques a deux causes principales :

¶ La largeur spectrale non nulle de la source. En effet, la vitesse de groupe dans le matériau de la fibre dépend en général de la fréquence optique. Donc, il y a étalement si la source a une largeur spectrale non nulle. Pour une DEL la largeur spectrale est d'environ 9 THz. L'effet d'étalement disparaît pratiquement à une longueur d'onde qui, pour la silice pure, est de 1,25 µm, et pour l'oxyde de germanium, d'environ 1,7 µm. Des valeurs intermédiaires sont applicables pour la silice dopée.

¶ L'incohérence spatiale de la source. Une source spatialement incohérente (DEL) émet des rayons dans différentes directions. Les temps de groupe sont différents le long de ces différents rayons. Pour une fibre à saut d'indice, par exemple, l'étalement en ns/km est égal à 5000 Δ. En pratique $\Delta \approx 0.01$. On a donc dans ce cas un étalement de 50 ns/km.

¶ Si l'indice était indépendant de la longueur d'onde, cet effet disparaitrait pour des profils d'indice quadratiques. En fait, le profil quadratique n'est pas tout à fait le profil optimum en raison de la

dispersion du matériau. Cette cause d'étalement existe aussi dans le cas de sources spatialement cohérentes (laser) car les défauts inévitables de la fibre couplent les rayons (ou les modes).

¶ Notons que les irrégularités de la fibre peuvent jouer un rôle utile et réduire la vitesse d'étalement de l'impulsion. On l'explique comme un effet de moyenne entre rayons d'amplitude différente. Les impulsions s'élargissent en proportion de la racine carrée de la longueur de fibre pour de grandes longueurs. Pour une excitation laser et de petites longueurs, l'étalement suit une loi en $L^{3/2}$.

¶ Il est utile de donner ici quelques indications concernant la fabrication des fibres optiques. La technique de fabrication qui permet d'obtenir les pertes les plus faibles est la méthode dite de déposition en phase vapeur (en anglais CVD ; chemical vapor deposition). Cette technique consiste à envoyer dans un tube de silice chauffé à haute température des composés de silice, tels que $SiCl_4$, de germanium, tels que $GeCl_4$ ou de phosphore, tels que P_2O_5 et de l'oxygène. La réaction chimique qui se produit conduit à un dépôt d'oxydes de silicium, de germanium ou de phosphore à l'intérieur du tube. Les oxydes de germanium et de phosphore augmentent l'indice de réfraction de la silice pure. On doit donc augmenter la proportion de $GeCl_4$ ou de P_2O_5 au cours du dépôt, afin d'augmenter l'indice sur l'axe de la fibre. Cette augmentation est essentielle au confinement du champ optique. La seconde étape de la fabrication consiste à rétreindre le tube de silice. Les forces de tension superficielle assurent à haute température la disparition du trou central. Il se produit cependant parfois pendant ce processus une évaporation gênante des dopants et une réduction de l'indice sur l'axe. Le cylindre de silice dopée obtenu, appelé *préforme*, a environ 10 mm de diamètre et 400 mm de long. Pour obtenir une fibre, on chauffe une extrémité de la préforme au voisinage de la température de fusion de la silice avec un four, une torche, ou un faisceau laser à 10.6 µm (laser à CO_2). La fibre est tirée à une vitesse de l'ordre du m/sec., recouverte par un matériau plastique protecteur mince du genre silicone, et enroulée sur un tambour. Elle est ensuite recouverte d'un matériau plastique plus épais, par exemple du nylon, et câblée avec d'autres fibres. Un des câbles développé par les Laboratoires Bell, par exemple, comporte 144 fibres (12 x 12) et a un diamètre extérieur inférieur à 10 mm. En général, les fibres ont, au moins nominalement, la symétrie de révolution. Des dimensions typiques sont : diamètre de coeur : 50 µm , diamètre de la gaine : 150 µm ; diamètre de la jaquette : 300 µm.

Nous allons maintenant discuter deux problèmes de propagation qui présentent une grande importance pratique : le profil optimal et l'effet des microcourbures. Mais d'abord, faisons la revue de quelques concepts de base relatifs à la propagation et précisons notre notation.

2. CONCEPTS DE BASE

La plupart des propriétés des fibres optiques multimodales sont bien expliquées par l'optique des rayons. Cependant le langage des modes est parfois utile aussi. Pour étudier certains phénomènes, tels que les pertes de gaine, il est indispensable d'utiliser des concepts d'optique ondulatoire.

Considérons un milieu homogène et indépendant du temps, par exemple un échantillon de silice. Des ondes monochromatiques planes peuvent se propager dans un tel milieu. La fréquence, f, de l'onde est l'inverse du temps qui s'écoule entre deux annulations successives du champ en un point fixe de l'espace. La fréquence spatiale, a, est l'inverse de la distance entre deux annulations successives du champ à un instant donné. La longueur d'onde λ dans le milieu ne doit pas être confondue avec la longueur d'onde dans le vide λ_0, qui est reliée à la fréquence f par

$$\lambda_0 = c/f \qquad (1)$$

où $c = 3 \times 10^8$ ms est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. On utilise souvent au lieu de la fréquence temporelle f et de la fréquence spatiale a, la fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$ et le nombre d'onde $k = 2\pi a$. En général, les expressions obtenues en utilisant f et a ont un sens physiques plus clair. Néanmoins nous nous conformerons à l'usage. La vitesse de phase v est la vitesse de déplacement des fronts d'onde. On a

$$v = \omega/k \qquad (2)$$

L'indice de réfraction (de phase) est défini par

$$n = c/v = ck/\omega \qquad (3)$$

Par exemple, pour la silice pure à une longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1{,}2$ µm on a : $n = 1{,}44805$.

¶ Si ψ représente le champ de l'onde (par exemple une composante transversale du champ électromagnétique), les solutions d'onde plane s'écrivent

$$\psi(x, y, z, t) = g(\phi) \qquad (4)$$

où g est une fonction périodique de période 2π : $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$, et

$$\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \qquad (5)$$

Les coefficients k_x, k_y, k_z, sont les composantes rectangulaires du vecteur d'onde $\vec{k}$. Sa longueur k est la fréquence spatiale

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \qquad (6)$$

Nous supposons désormais le milieu linéaire. Dans ce cas, la fonction g est sinusoïdale. On a

$$\psi(x, y, z, t) = \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \qquad (7)$$

à un terme de phase et d'amplitude près *.

----

* Des solutions complexes sont acceptables en électrodynamique quantique, mais en théorie classique, les solutions sont réelles.

Nous supposons aussi que le milieu est isotrope. La longueur d'onde λ, le nombre d'onde k, la vitesse de phase v et l'indice de réfraction n sont alors indépendants de la direction de l'onde, c'est-à-dire de la direction du vecteur d'onde $\vec{k}$.

¶ Le nombre d'onde k est fonction de la fréquence angulaire ω. Il est commode de représenter la variation de l'indice n en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 par la loi dite de Sellmeier

$$n^2 = 1 + \sum_{\gamma=1}^{3} A_\gamma (1 - \pi_\gamma)^{-1} \quad ; \quad \pi_\gamma = \left(\frac{\ell_\gamma}{\lambda_0}\right)^2 \qquad (8)$$

où ℓ_1, ℓ_2, A_1, A_2, A_3 sont des coefficients. Chacun des termes de l'équation (8) correspond à une résonance du matériau. En général, une des résonances (ℓ_3) est dans l'infrarouge et les deux autres (ℓ_1, ℓ_2) sont dans l'ultraviolet. La forme de l'équation (8) permet de décrire avec précision les résultats expérimentaux, indépendamment de toute justification physique. Des résultats expérimentaux relatifs à la silice dopée, obtenus par la méthode de la déviation minimum des rayons par un prisme du matériau, sont donnés tableau 1. Lorsque k est proportionnel à ω, ou n indépendant de λ_0, on dit que le matériau est *non-dispersif*.

	Silice refroidie rapidement	Silice dopée à 13,5 mole pour cent d'oxyde de germanium
A_1	0,6967	0,7110
ℓ_1	0,0691	0,0643
A_2	0,4082	0,4519
ℓ_2	0,1157	0,1294
A_3	0,8908	0,7040
ℓ_3	9,9006	9,4255
$\lambda_0 \left(\frac{d^2n}{\lambda_0^2} = 0\right)$	1,284 µm	1,383 µm

Afin de transmettre des informations il est nécessaire de tronquer l'onde monochromatique plane considérée précédemment dans l'espace et dans le temps. Pour obtenir la direction et le mouvement du paquet d'ondes il suffit d'écrire que la phase ϕ définie en équation (5) est stationnaire.

Supposons que l'onde plane monochromatique soit modulée par une impulsion de courte durée. La vitesse de déplacement du centre de l'impulsion est donnée par la concordance des phases des ondes élémentaires. On a :

$$d\phi = dk\,x - d\omega\,t = 0 \qquad (9)$$

D'où

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \qquad (10)$$

Pour simplifier, nous avons considéré une seule coordonnée spatiale x, mais le résultat, équation (10), est général.

La vitesse de déplacement u du centre de l'impulsion s'appele la vitesse de groupe. Le temps que met l'impulsion à traverser une longueur L du milieu, appelé temps de groupe, est

$$t = L\,\frac{dk}{d\omega} \tag{11}$$

En optique des rayons, on ignore l'étalement de cette impulsion et on considère seulement son mouvement moyen. L'indice de groupe est défini par

$$n_g = \frac{c}{u} \tag{12}$$

Il est utile de définir aussi un indice de dispersion $\bar{n}$. C'est la moyenne géométrique de n et n_g

$$\bar{n} = \sqrt{n\,n_g} = c\,\sqrt{\frac{d(k^2)}{d(\omega^2)}} \tag{13}$$

En l'absence de dispersion on a v = u et $n = \bar{n} = n_g$. Si $n(\lambda_0)$ est donné par la loi de Sellmeier en équation (8), l'indice de dispersion $\bar{n}$ est donné par

$$\bar{n}^2 = 1 + \sum_{\gamma=1}^{3} A_\gamma\,(1 - \pi_\gamma)^{-2} \tag{14}$$

Supposons maintenant que deux porteuses de fréquences optiques distinctes ω et $\omega + \Delta\omega$ soient modulées par la même impulsion courte. Le temps de trajet $t = L dk/d\omega$ donné en équation (11) dépend en général de la fréquence porteuse. Il n'a donc pas la même valeur pour la porteuse à la fréquence ω et pour la porteuse à la fréquence $\omega + \Delta\omega$. L'impulsion initiale se divise, de ce fait, en deux impulsions séparées dans le temps par

$$\Delta t = t(\omega + \Delta\omega) - t(\omega) = L\,\frac{d^2k}{d\omega^2}\,\Delta\omega \tag{15}$$

si $\Delta\omega$ est petit. Le matériau peut donc être caractérisé par le paramètre de dispersion

$$M = \frac{\lambda_0^2}{n}\,\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda_0^2} = \frac{\omega^2}{k}\,\frac{d^2k}{d\omega^2} \tag{16}$$

Si Δf est la largeur spectrale de la source, on a d'après les équations (15) et (16)

$$\begin{aligned}\Delta t &= (L/v)\,M\,(\Delta\omega/\omega)\\ &\approx 5000\,M(\Delta\lambda_0/\lambda_0)\,\text{ns/km}\end{aligned} \tag{17}$$

Considérons maintenant une onde limitée transversalement par une ouverture grande par rapport à la longueur d'onde. Nous nous limitons

à deux coordonnées spatiales x et z. Le déplacement du centre du faisceau défini par l'ouverture est obtenu ici encore en écrivant que la phase est stationnaire

$$d\phi = dk_x x + dk_z z = 0 \tag{18}$$

ou

$$\frac{dx}{dz} = \dot{x} = -\,\frac{dk_z}{dk_x} \tag{19}$$

Dans un milieu isotrope le nombre d'onde k est indépendant de la direction de propagation de l'onde. On a donc, en dérivant l'expression

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \tag{20}$$

par rapport à k_x, avec k constant

$$\dot{x} = k_x/k_z \tag{21}$$

Cette relation montre que le rayon a la direction du vecteur d'onde $\vec{k}$. En optique des rayons, on ne s'intéresse pas à l'étalement du faisceau dû à la diffraction, mais seulement à sa trajectoire moyenne, c'est-à-dire au lieu d'intensité maximal.

Ce que nous avons établi ci-dessus est applicable aux milieux homogènes, dans l'approximation de l'optique des rayons. Pour calculer la trajectoire des rayons dans un milieu inhomogène, une autre relation est nécessaire. Considérons une interface plane x = 0, entre deux milieux d'indices n_o et n_c (nombre d'onde k_o et k_c), et une onde plane incidente. La composante k_z du vecteur d'onde est nécessairement continue. Autrement il y aurait accumulation de déphasage de chaque côté de l'interface. On en déduit tout de suite la loi de la réfraction de Descartes et de Snell (1637)

$$k_c \sin i_c = k_o \sin i_o \tag{22}$$

où i_c et i_o sont les angles que fait le rayon dans les deux milieux par rapport à la normale ox.

Supposons maintenant que k soit une fonction continue de x et évaluons maintenant le changement de direction du rayon. Il suffit de dériver la relation

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2(x) \tag{23}$$

en tenant compte du fait que k_z est constant. On obtient d'abord

$$k_x dk_x = k\,dk \tag{24}$$

d'où il suit, en utilisant aussi l'équation (21), que

$$\frac{dk_x}{dz} = \frac{k}{k_x}\,\frac{dk}{dx}\,\frac{dx}{dz} = \frac{k}{k_z}\,\frac{dk}{dx} \tag{25}$$

Regroupons les équations (21) et (25)

$$\dot{x} = k_x/k_z \tag{26}$$

$$dk_x/dz = (k/k_z)dk/dx \tag{26}$$

Ce sont les équations des rayons proposées par Hamilton en 1837. Ces équations définissent complètement la trajectoire d'un rayon dans le plan xz dès que les conditions initiales sont fixées. Elles sont valables même si k dépend de la coordonnée z et elles peuvent être généralisées au cas de plusieurs variables transversales x, y et t. Aux variables x, y, t correspondent les variables dites *conjuguées canoniquement* k_x, k_y et $-\omega$ [le signe moins devant ω venant de la définition de la phase totale en équation (5)]. Ecrivons donc les équations de Hamilton sous une forme générale applicable aux milieux isotropes dispersifs.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dz} = \frac{k_x}{k_z} \quad ; \quad \frac{dk_x}{dz} = \frac{k}{k_z}\frac{dk}{dx} \tag{27a}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dz} = \frac{k_y}{k_z} \quad ; \quad \frac{dk_y}{dz} = \frac{k}{k_z}\frac{dk}{dy} \tag{27b}$$

$$\dot{t} = \frac{dt}{dz} = \frac{k}{k_z}\frac{d\omega}{dk} \quad ; \quad \frac{d\omega}{dz} = 0 \tag{27c}$$

La fréquence ω de l'onde optique est ici une constante du mouvement parce que le milieu est indépendant du temps. La première équation (27c) se réduit à ω/k_z dans le cas où le milieu n'est pas dispersif. Les équations relatives à l'espace et au temps sont alors semblables. Les équations (27) ci-dessus sont les équations exactes des rayons. L'approximation paraxiale est utilisée dans le paragraphe suivant.

3. PROFIL D'INDICE OPTIMAL

¶ Nous allons déterminer le profil d'indice optimal de fibres optiques que nous supposons uniformes suivant la direction axiale z. Dans ce calcul, il sera tenu compte de la dispersion inhomogène du matériau c'est-à-dire du fait que le rapport vitesse de groupe à vitesse de phase varie avec le rayon. Nous supposons que la source est quasi monochromatique mais excite différents rayons. Il s'agit donc de déterminer le profil d'indice n(r) tel que les temps de groupe soient les mêmes pour tous les rayons susceptibles d'être émis par la source.

Rappelons les équations fondamentales des rayons paraxiaux. Soit n(x,y) l'indice de réfraction, et $U(x,y) = 1 - n(x,y)/n(0,0)$ une fonction que nous appellerons "potentielle" par analogie avec la mécanique. Une trajectoire du rayon $x = x(z)$, $y = y(z)$ obéit aux équations différentielles suivantes

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \quad ; \quad \ddot{y} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \tag{28}$$

où les points indiquent des dérivées par rapport à z. C'est l'approximation paraxiale ($\dot{x} \ll 1$, $\dot{y} \ll 1$) des équations (27a) et (27b).

A partir de ces équations de base, nous établissons les théorèmes suivants :

Il existe une quantité

$$E = U + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{29}$$

qui est constante le long d'un rayon. Il faut bien comprendre que dans cette expression, U est une fonction connue de x et de y, et que d'autre part, pour une trajectoire spécifiée, $x, y, \dot{x}$ et $\dot{y}$ sont des fonctions de z. On s'attend donc à ce que E soit une fonction de z. Nous montrons ci-dessous qu'il n'en est rien. En effet

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \tag{30}$$

si l'on utilise les expressions, équation (28), de $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$. E est une constante de mouvement (analogue à l'énergie en mécanique). Elle est liée étroitement à la constante de propagation β de l'optique ondulatoire. On a en effet

$$\beta = k_0(1 - E) \tag{31}$$

où $k_0 = (\omega/c)n_0$ et $n_0 = n(0,0)$.

¶ Un résultat moins connu est le suivant : on a*

$$E = \overline{d(RU)/dR} \tag{32}$$

où U est considéré comme une fonction de $R = r^2$, pour une fibre ayant la symétrie circulaire. La barre supérieure indique une moyenne sur z (évaluée, par exemple, pour une période Z du rayon). Pour établir ce résultat, montrons d'abord que

$$d^2(x^2)/dz^2 = 2\dot{x}^2 - 4x^2\partial U/\partial(x^2) \tag{33}$$

Il suffit de calculer successivement $d(x^2)/dz = 2x\dot{x}$, $d^2(x^2)/dz^2 = d(2x\dot{x})/dz = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$, et d'utiliser l'expression $\ddot{x}$, équation (28). En ajoutant à l'équation (33) une équation similaire établie pour y, nous obtenons

$$d^2(x^2 + y^2)/dz^2 = 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 4[x^2\partial U/\partial(x^2) + y^2\partial U/\partial(y^2)] \tag{34}$$

Et pour une fibre qui a la symétrie circulaire, avec

$$x^2 + y^2 = R \quad ; \quad \partial U/\partial(x^2) = \partial U/\partial(y^2) = \partial U/\partial R \tag{35}$$

---

* Si U est une puissance K de R on obtient tout de suite à partir de l'équation (32) le théorème du viriel qui s'énonce : $T = E - U = KU$. Si $K = 1$, alors $T = U$.

l'équation (34) devient, en utilisant l'expression équation (29) de E ,

$$d^2R/dz^2 = 4(E - U) - 4\,R\,dU/dR \qquad (36)$$

Enfin, si l'on intègre l'équation (36) sur une période de rayon, le terme à gauche du signe égal disparait car dR/dz a la même valeur aux deux limites d'intégration, et l'équation (32) est établie. Ce résultat est utilisé ci-dessous pour obtenir le profil optimal.

Le temps de groupe le long d'un rayon est simplement

$$t = \int_0^L ds/u \qquad (37)$$

si L est la longueur de la fibre ,

$$ds \approx dz\,(1 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2) = dz\,(1 + E - U) \qquad (38)$$

est l'arc élémentaire de rayon, et u la vitesse de groupe locale, qui est une fonction supposée connue de x et de y.

Il est commode de poser

$$1 - u_0/u = f(U) \qquad (39)$$

où $u_0 = u(0,0)$ est la vitesse de groupe sur l'axe. Le membre de gauche est une fonction de x et de y comme on l'a dit ci-dessus. Cependant, pour une classe de matériaux qui ne dépend que d'un paramètre (par exemple la concentration en oxyde de germanium) et des variations suffisamment régulières des indices, on peut aussi considérer $1 - u_0/u$ comme une fonction de $U = 1 - n/n_0$. C'est la raison pour laquelle nous avons écrit le membre de droite de l'équation (39) : f(U).

¶ Si, de plus, nous définissons un temps de trajet relatif

$$\overline{\tau} = t/t_0 - 1 \qquad (40)$$

où t_0 correspond à un rayon sur l'axe, nous obtenons, en substituant les équations (37), (38) et (39) dans (40) et en négligeant les quantités de l'ordre de Δ^2 l'expression :

$$\overline{\tau} = E - \overline{[U + f(U)]} \qquad (41)$$

Ici encore, la barre représente une moyenne sur z.

Introduisons maintenant dans l'équation (41) l'expression de E donnée en équation (32). Nous obtenons

$$\tau = \overline{R\,dU/dR - f(U)} \qquad (42)$$

d'où il résulte que $\overline{\tau} = 0$, c'est-à-dire $t = t_0$ pour tous les rayons, si

$$R\,dU/dR = f(U) \Rightarrow \int^R dR/R = \int^U dU/f(U) \qquad (43)$$

L'intégration, immédiate, conduit au profil optimal :

$$(r/r_c)^2 = \exp \int_\Delta^U dU/f(U) \qquad (44)$$

où nous avons introduit le rayon du coeur r_c avec $U(r_c) = \Delta$, et d'après les conditions aux limites. Notons qu'aucune hypothèse n'a été faite jusqu'ici concernant la dispersion du matériau.

Considérons maintenant quelques cas particuliers et explicitons le contenu pratique de cette équation. Supposons d'abord que le milieu soit non dispersif. Alors n est indépendant de la fréquence optique et $u = c/n$,

$$u_0/u = n/n_0 = 1 - U \Rightarrow f(U) = U \qquad (45)$$

La solution de l'équation (44) est le profil quadratique

$$U(r) = \Delta(r/r_c)^2 \qquad (46)$$

¶ Supposons maintenant que f(U) soit proportionnel à U mais avec un coefficient $\overline{K}$ différent de l'unité. L'intégration de l'équation (44) avec $f(U) = \overline{K}U$ donne alors

$$U(r) = \Delta(r/r_c)^{2\overline{K}} \qquad (47)$$

Le problème pratique qui se pose dans ce cas est la mesure du coefficient de dispersion inhomogène $\overline{K}$. Ce coefficient peut être obtenu par une mesure de la variation de Δ en fonction de la fréquence optique, s'il y a continuité entre le matériau du coeur ($r \leq r_c$) et celui de la gaine ($r > r_c$). Observons tout d'abord que si f(U) est proportionnel à U, alors le profil d'indice ne change pas de forme lorsque la fréquence optique varie, mais change seulement d'échelle : en d'autres termes, la fonction $U(r,\omega)$ se factorise de la façon suivante :

$$U(r,\omega) = \Delta(\omega)\,\overline{U}(r) \quad ; \quad \overline{U}(r_c) = 1 \qquad (48)$$

Dans ce cas, la formule générale

$$1 - u_0/u = 1 - (\partial k/\partial\omega)/(dk_0/d\omega) \quad ; \quad k = k_0(1 - U)$$

$$= U + (k_0/\omega)\,(d\omega/dk_0)\,\omega\,\partial U/\partial\omega \approx U + \omega\,\partial U/\partial\omega \qquad (49)$$

devient *, avec l'équation (48)

$$\overline{K}U = 1 - u_0/u = U\,(1 + \frac{\omega}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\omega}) = U\,(1 - \frac{\lambda_0}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda_0}) \qquad (50)$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide : $\omega/c = 2\,\pi/\lambda$. D'où la forme du coefficient $\overline{K}$ de l'équation (47) donnant le profil optimal..

$$\overline{K} = 1 - \frac{\lambda_0}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda_0} \qquad (51)$$

---

* La quantité $(k_0/\omega)\,(d\omega/dk_0)$ multiplie un terme petit devant l'unité. Sa déviation par rapport à l'unité, qui est petite, peut donc en pratique être négligée.

¶ Un autre procédé consiste à effectuer des mesures d'indice sur des échantillons des matériaux utilisés, par exemple sur des échantillons de silice dopés avec 0, 5, 10 ... mole pour cent d'oxyde de germanium. Pour chacun de ces échantillons, la variation de l'indice avec la longueur d'onde dans le vide λ_0 est caractérisée par une loi de Sellmeier, comme on l'a défini, équation (8). Nous en avions déduit un indice de dispersion $\overline{n}$ [voir l'équation (14)]. Les quantités $U = 1 - n/n_0$ et $f = 2(1 - \overline{n}/\overline{n}_0) - U$ sont donc deux fonctions connues de la concentration de dopant. Si f est bien proportionnel à U comme on l'a supposé, l'exposant optimal $\overline{K}$ sera donné par la formule

$$\overline{K} = f/U = 2(1 - \overline{n}/\overline{n}_0)/(1 - n/n_0) - 1 \qquad (52)$$

Cette deuxième méthode présente des sources d'erreurs liées aux différences d'histoires thermiques des matériaux. Il n'est pas certain que les mesures faites sur des échantillons isolés soient comparables aux mesures faites sur la fibre elle-même. En ce qui concerne la proportionnalité de f à U, la situation sur le plan expérimental reste controversée. Disons que l'approximation linéaire qui conduit au profil en puissance de r est probablement valable si la concentration des dopants n'excède pas 10 %. Notons que si, dans le cadre des approximations faites, l'exposant K du profil d'indice d'une fibre ne dépend pas de la longueur d'onde la valeur du coefficient optimal $\overline{K}$ par contre en dépend en général. Il en résulte qu'une fibre n'est optimale qu'au voisinage d'une certaine longueur d'onde. A partir des valeurs numériques du tableau 1, on constate par exemple que l'exposant optimum $\overline{K} \approx 0{,}95$ ($\alpha_{opt} \approx 1{,}9$) à $\lambda_0 = 1{,}3$ µm alors qu'il est égal à 1 à $\lambda_0 = 0{,}9$ µm, pour un dopage au GeO_2.

4. Effet des microcourbures

Une courbure * constante de l'axe de la fibre, résultant par exemple du bobinage de la fibre sur un tambour lisse, peut entraîner une perte par rayonnement. Cet effet, cependant, est en pratique négligeable dans le cas des fibres multimodales. Nous étudions ici un effet différent. Il s'agit d'une courbure de l'axe de la fibre qui varie assez rapidement en fonction de la coordonnée axiale z. L'effet d'une courbure variable est d'augmenter en moyenne l'amplitude d'oscillation des rayons. Après une certaine distance, les rayons ont une amplitude d'oscillation telle qu'ils atteignent la gaine et sont perdus. La transmission optique peut être définie comme la probabilité qu'un rayon soit transmis sans atteindre la gaine sur la longueur, L, de la fibre.

Pour traiter le problème de la microcourbure des fibres multimodales il est permis d'utiliser la théorie des rayons paraxiaux. Il suffit d'ajouter au membre de droite des équations (28) des termes $C_x(z)$ et $C_y(z)$, respectivement, où $C_x(z)$, $C_y(z)$ représenent les courbures de l'axe de la fibre dans les plans xz et yz respectivement.

---

* La courbure est définie comme l'inverse du rayon de courbure de la fibre.

Avant d'aborder le cas général, il est utile de discuter un cas très simple : celui d'une plaque diélectrique dont les courbures ont un spectre uniforme de densité spectrale γ. Dans ce cas, prenant comme variable $\Theta = \dot{x}$, l'équation des rayons paraxiaux s'écrit $\dot{\Theta} = C(z)$. Donc

$$\Theta(z) = \Theta_0 + \int_0^z C(z')dz' \qquad (53)$$

D'où il résulte que

$$< \Theta(z) - \Theta_0 > = 0$$

$$< [\Theta(z) - \Theta_0]^2 > = \int_0^z \int_0^z < C(z')\, C(z'') > dz'dz'' = \gamma \qquad (54)$$

si le processus C(z) est nul en moyenne et

$$< C(z')\, C(z'') > = \gamma\, \delta(z' - z'') \qquad (55)$$

où < > note une moyenne d'ensemble et $\delta(.)$ la distribution de Dirac. L'équation (54) est valable tant que tous les rayons sont transmis, c'est-à-dire tant que pour tout $z' < z$, $\Theta(z') < \sqrt{2\Delta}$, où Δ représente la différence relative d'indice.

Calculons maintenant le temps moyen d'arrivé <t> de l'impulsion optique en conservant les mêmes hypothèses. Si t_0 représente le temps de parcours d'impulsion le long de l'axe, nous avons $dt/dt = 1/\cos\Theta$ $dt/dt_0 = 1/\cos\Theta \approx 1 + \Theta^2/2$. Donc, pour une longueur L de fibre

$$t = t_0 + (1/2\, Vg) \int_0^L \Theta^2(z)dz \qquad (56)$$

où Vg note la vitesse de groupe dans le matériau et $t_0 = L/Vg$. Par conséquent

$$< t - t_0 > = \frac{1}{2\, Vg} \int_0^L < \Theta^2(z) > dz = \frac{1}{4}\gamma L^2/Vg \qquad (57)$$

en utilisant l'équation (57) si $\Theta_0 = 0$. En général, il suffit d'ajouter le terme $L\,\Theta_0^2/2\, Vg$, qui est indépendant des déformations. Rappelons que ces résultats ne sont valables qu'au début de la fibre. L'expression <t> se modifie considérablement lorsque une proportion appréciable des rayons est absorbée par la gaine.

Une expression très générale peut être établie pour une fibre circulaire déformée de façon quelconque. On peut montrer que la densité de puissance optique $Q(\mu, \alpha, z, t)$ dans le mode μ, α, en z et à l'instant t obéit à une équation (dite de Fokker - Planck) autoadjointe.

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + V_g^{-1}(\mu,\alpha)\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\mu} D_0(\mu,\alpha)\frac{\partial Q}{\partial\mu}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\mu} D_1(\mu,\alpha)\frac{\partial Q}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha} D_1(\mu,\alpha)\frac{\partial Q}{\partial\mu} + \frac{\partial}{\partial\alpha} D_2(\mu,\alpha)\frac{\partial Q}{\partial\alpha} \qquad (58)$$

où $V_g(\mu,\alpha)$ représente la vitesse de groupe du mode μ,α et D_0, D_1, D_2

sont des coefficients de diffusion qui dépendent de la déformation. Cette équation peut être établie, soit par la théorie modale en passant à la limite de modes très denses, les nombres μ, α étant alors traités comme des variables continues, soit par la théorie des rayons. Les deux procédés sont équivalents. Dans le cas des microcourbures nous avons obtenu une expression analytique simple pour ces coefficients de diffusion. Des solutions analytiques de l'équation (58) avec les conditions aux limites appropriées peuvent être obtenues pour le cas des profils d'indice quadratique. On trouve ainsi un coefficient de perte de microcourbure.

$$\text{Pertes} = 7{,}9\ \gamma/\Delta\ \text{dB/unité de longueur} \tag{59}$$

pour de grandes longueurs de fibres. Ici, γ représente la densité spectrale du processus de courbure $C(z)$ à la fréquence (spatiale) d'oscillation naturelle des rayons.

Un résultat très général qui peut être établi sur la base de l'équation (58) par le théorème des limites centrales, est que la largeur impulsionnelle s'accroit en proportion de $\sqrt{L}$ au lieu de L pour de grandes longueurs de fibres. D'autre part, on montre que le produit $R^2\mathcal{L}$, où R est le rapport de la largeur impulsionnelle efficace σ ($\sigma = [\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2]^{1/2}$) avec et sans déformation, et $\mathcal{L}$ est la perte due aux déformations, ne dépend que du profil d'indice et de la forme du spectre de microcourbure. Pour une fibre à saut d'indice, par exemple, nous avons $R^2\mathcal{L} = 0{,}74$ dB.

Bibliographie

[1] KAO K.C. et DAVIES T.W.
Spectrophotometric Studies of Ultra-low Loss Optical Glasses, Single Beam Method, J. Scientific Inst. I (ser. 2), p. 1063-1068, 1968

[2] KAPRON F.P., KECK D.B. et MAURER R.D.
Radiation Losses in Glass Optical Waveguides, Appl. Phys. Lett. 17, p. 423-425, nov. 15, 1970

[3] Mc CHESNEY J.B., O'CONNOR P.B. et PRESBY H.M.
Proc. I.E.E.E. 62, p. 1280,81, septembre 1974

[4] MARCUSE D.
Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, NY, 1974

[5] ARNAUD J.
Beau and Fiber Optics, Academic Press, NY, 1976

[6] BARNOSKI M.K.
Fundamentals of Optical Fiber Communication, Academic Press, NY, 1976

[7] UNGER G.
Planar Optical Waveguides and Optical Fibers, Plenum Press, 1978

[8] CLAPEAU M. et ARNAUD J.
AEÜ (à paraître)