APPLICATION DES TECHNIQUES HAMILTONIENNES AUX FIBRES MULTIMODALES

par

Jacques ARNAUD
Ingénieur E.S.E., Docteur ès sciences *

ANALYSE. — *L'article montre comment appliquer les techniques développées par Hamilton au calcul de l'étalement des impulsions dans les fibres optiques multimodales. En particulier, il donne une expression simple pour le profil optimal de fibres utilisant un matériau dispersif. Le passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées cylindriques est fait sous la forme hamiltonienne et sous la forme lagrangienne*

ABSTRACT. — *This paper demonstrate the application of the techniques proposed by Hamilton to the calculation of the broadening of pulses in multimode optical fibers. The author gives in particular the optimum profile of fibers employing dispersive materials. The transformation from rectangular to cylindrical coordinates is made in both the Hamiltonian and Lagrangian forms*

SOMMAIRE. — 1 : *Introduction.* 2 : *Milieux homogènes et indépendants du temps.* 3 : *Paramètres utilisés en pratique.* 4 : *Milieux inhomogènes.* 5 : *Passage aux coordonnées cylindriques.* 6 : *Profil optimal d'une fibre dispersive.* 7 : *Conclusion. Appendice. Bibliographie (9 réf.).*

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de montrer comment appliquer les techniques développées par Hamilton au XIXe siècle au calcul de l'étalement des impulsions dans les fibres optiques multimodales. Le contenu physique des équations de Hamilton étant identique à celui des équations classiques des rayons, tout résultat obtenu avec la méthode hamiltonienne peut, en principe, être obtenu également par une méthode plus conventionnelle. Cependant, le formalisme hamiltonien présente de nombreux avantages. Résumons-les. Ce formalisme montre clairement le rapport étroit existant entre l'optique des rayons et l'optique des ondes. En outre, il permet de formuler les lois de l'optique géométrique des milieux anisotropes et des milieux dépendant du temps de façon simple. Mais surtout, il met en évidence les constantes de mouvement associées aux symétries du système. On montre, en particulier, que la composante axiale du moment angulaire, qui s'introduit naturellement dans les équations de Hamilton écrites en coordonnées cylindriques, reste constante le long d'un rayon si le milieu possède la symétrie de révolution. Cette quantité est appelée *constante de Bouguer* en optique géométrique. C'est aussi le nombre d'onde azimutal dans la théorie des modes. Observons enfin que les équations de Hamilton s'appliquent à la mécanique classique aussi bien qu'à l'optique géométrique. On peut traiter de la même façon le mouvement d'une particule dans un potentiel inhomogène et celui d'une impulsion optique dans un milieu d'indice variable.

Pour des raisons à la fois historiques et expérimentales, les traités de mécanique prennent comme point de départ la fonction lagrangienne, définie comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule dont on cherche à déterminer le mouvement. Le point de départ, beaucoup plus général, utilisé en optique, consiste à définir dans chaque région élémentaire de l'espace, considérée comme homogène, une surface des vecteurs d'onde. Cette surface, qui spécifie la longueur d'onde dans une direction quelconque de propagation, est bien définie si la longueur d'onde est petite devant l'échelle des inhomogénéités. Dans la présente étude, nous utilisons la généralisation de la théorie de Hamilton à l'espace-temps (voir, par exemple [1, 2 et 3].

Dans le paragraphe 2, nous rappelons les concepts fondamentaux et nous précisons notre notation. Dans le paragraphe 3, nous introduisons l'indice de réfraction n_1 et un indice de dispersion $\bar{n}$, qui est important dans les calculs numériques. Le paragraphe 4 est consacré aux milieux inhomogènes, et plus particulièrement à la réfraction par un plan de discontinuité. Nous écrivons dans le paragraphe 5 les équations de Hamilton en coordonnées cylindriques. Enfin, un problème simple, mais très important en pratique, est traité dans le paragraphe 6 : celui de la détermination du profil optimal d'une fibre optique multimodale. Le lecteur peut, s'il le désire, lire en premier lieu le paragraphe 6, où les notations sont rappelées,

* Aux Bell laboratories, Holmdel 07733, U.S.A., détaché comme professeur associé au laboratoire des signaux et systèmes, E.S.E., Gif-sur-Yvette, 91190 France.

et revenir ensuite aux généralités qui précèdent. La forme lagrangienne de l'équation des rayons n'est pas indispensable, mais elle est souvent utile. Nous l'avons rappelée en appendice.

2. MILIEUX HOMOGÈNES ET INDÉPENDANTS DU TEMPS

Lorsque le milieu est homogène et indépendant du temps, l'équation d'onde est une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Cette équation a des solutions d'onde plane :

$$(1)\qquad \psi(x, y, z, t) = g(a_x x + a_y y + a_z z - ft)\,, \\ = g(\vec{a}\,.\,\vec{x} - ft)\,, \\ = g(\vec{A}\,.\,\vec{X})\,,$$

où g est une fonction périodique de période unité.

Le vecteur $\vec{x} = (x, y, z)$ représente un point de l'espace et t le temps. La fréquence f de l'onde est l'inverse de l'intervalle de temps qui sépare deux crêtes successives du champ en un point donné de l'espace. Le vecteur d'onde $\vec{a}$, de composantes rectangulaires a_x, a_y, a_z est perpendiculaire au front d'onde. Sa longueur a, appelée la *fréquence spatiale*, est l'inverse de la distance λ (longueur d'onde), qui sépare deux crêtes successives du champ à un instant donné (*). Sa direction est celle de déplacement des fronts d'onde au cours du temps.

Nous avons introduit dans (1) les quadrivecteurs :

$$(2)\qquad \vec{X} = (x, y, z, t)\,, \\ \vec{A} = (a_x\,, a_y\,, a_z\,, -f)\,.$$

Dans tout ce qui suit, nous nous limitons aux milieux linéaires pour lesquels la fonction g est sinusoïdale. A un terme d'amplitude et de phase près, le champ est (Fig. 1) :

$$(3)\qquad \psi(x, y, z, t) = \sin\,[2\,\pi(a_x x + a_y y + a_z z - ft)]\,.$$

Si l'on fait varier la direction de propagation, la fréquence f étant fixe, l'extrémité du vecteur $\vec{a}$ décrit une surface appelée *surface des vecteurs d'onde*. Cette surface, qui joue un rôle fondamental, peut être obtenue assez facilement une fois que l'équation d'onde a été spécifiée. Nous écrivons la surface des vecteurs d'onde sous forme implicite (**) :

$$(4)\qquad H(\vec{A}) = H(a_x\,, a_y\,, a_z\,, f) = 0.$$

Notons qu'une surface peut être représentée par différentes fonctions. Les résultats physiques sont indépendants de la forme $H(\vec{A})$ choisie pour représenter la surface des vecteurs d'onde.

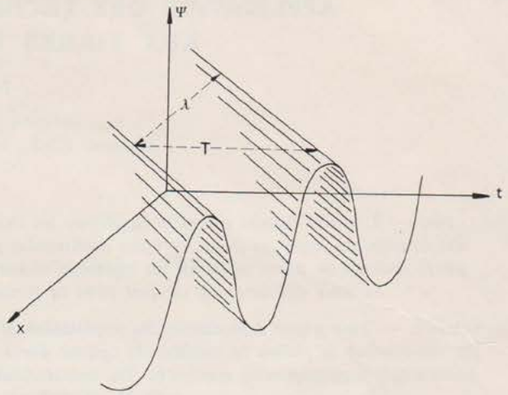

FIG. 1. — Champ $\psi(x, t)$. La fréquence f est l'inverse de la période temporelle T. La fréquence spatiale a est l'inverse de la période spatiale, ou longueur d'onde λ.

En l'absence de contraintes mécaniques, la plupart des verres sont isotropes pour la propagation électromagnétique. Dans les milieux isotropes, le vecteur d'onde a la même longueur, a, pour toutes les directions spatiales de propagation. La surface des vecteurs d'onde est donc une sphère de rayon a :

$$(5)\qquad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a^2(f) = 0,$$

la fréquence spatiale a étant une fonction généralement quelconque de la fréquence f. Si a est proportionnel à f, le milieu est dit *non dispersif* et l'on écrit :

$$(6)\qquad a = f/v,$$

où v représente la vitesse de déplacement des fronts d'onde (vitesse de phase). D'une manière générale, un milieu est dit non dispersif si la fonction $H(\vec{A})$ en (4) est telle que $H(\alpha\vec{A}) = \alpha H(\vec{A})$ pour tout nombre α. La fréquence f est alors proportionnelle à a pour toute direction fixe de propagation.

Etudions maintenant le concept de rayon. Supposons que l'on limite la largeur d'une onde plane au moyen d'une ouverture grande par rapport à la longueur d'onde. On constate que l'onde transmise à travers l'ouverture n'a une intensité importante que dans une direction qui, en général, n'est pas celle du vecteur d'onde. La décomposition spectrale du champ après l'ouverture fait en effet apparaître un paquet d'ondes, de vecteurs d'onde voisins, à la place de l'onde unique incidente. La construction géométrique de la figure 2 *a* montre que la distance entre les crêtes successives du champ est la même pour les différentes ondes de ce paquet dans une direction particulière, perpendiculaire à la surface des vecteurs d'onde.

(*) Certains auteurs utilisent, au lieu de a et f, les quantités $k = 2\pi a$ et $\omega = 2\pi f$. Les expressions obtenues en utilisant directement la fréquence temporelle f et la fréquence spatiale a ont, en général, une signification physique plus claire. C'est la raison de notre choix.

(**) Exceptionnellement, dans cet article, la fonction et l'opérateur seront désignés de la même façon.

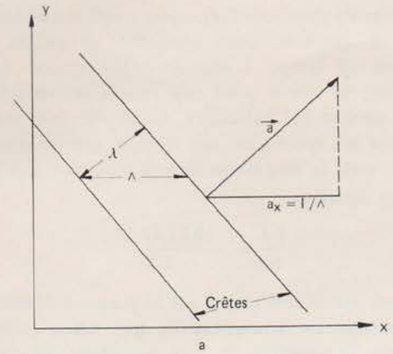

FIG. 2 *a*. — Crêtes d'une onde plane harmonique dans un espace à deux dimensions. La longueur d'onde Λ dans une direction oblique est obtenue en projetant le vecteur d'onde sur la direction considérée.

Si nous appelons $\partial\vec{x}/\partial\sigma$ cette direction, nous avons donc (*) :

$$(7)\qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\sigma} = \frac{H(\vec{a}, f)}{\partial\vec{a}}\,,$$

dont la première composante est, par exemple :

$$\frac{\partial x}{\partial\sigma} = \frac{\partial H(a_x\,, a_y\,, a_z\,, f)}{\partial a_x}\,.$$

Un rayon est défini sous forme paramétrique : $\vec{x} = \vec{x}(\sigma)$, c'est-à-dire par les trois fonctions scalaires $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ et $z = z(\sigma)$ du paramètre σ. Dans le cas considéré d'un milieu homogène, le membre de droite de (7) ne dépend pas de x, y ou z, et les rayons sont des lignes droites. Rappelons que la relation (4) permet de choisir trois des composantes du quadrivecteur $\vec{A}$, par exemple a_x, a_y et f. La composante a_z est alors déterminée (nous supposons pour simplifier qu'il existe une et une seule solution telle). L'équation (7) fournit la direction du rayon correspondant. La paramétrisation σ, cependant, dépend du choix de la fonction $H(\vec{A})$ qui, comme nous l'avons indiqué, n'est pas définie entièrement par la surface des vecteurs d'onde. Observons aussi que la position du rayon n'est pas définie de façon précise, puisque l'ouverture a une largeur grande par rapport à la longueur d'onde. Cette incertitude sur la position exacte du rayon est inévitable. Pour rendre plus précise la position du rayon, il faudrait rendre incertaine sa direction ($\Delta x\,\Delta a_x \approx 1$).

Dans le cas particulier des milieux isotropes, nous substituons la forme (5) de $H(\vec{A})$ dans (7) et obtenons :

$$(8)\qquad \frac{\partial x}{\partial\sigma} = 2\,a_x\,;\ \frac{\partial y}{\partial\sigma} = 2\,a_y\,;\ \frac{\partial z}{\partial\sigma} = 2\,a_z\,.$$

Ces relations signifient simplement que le rayon a la direction du vecteur d'onde. Le facteur 2 n'a pas de signification physique.

Nous généralisons l'équation (7) à l'espace-temps en remplaçant $\vec{x}$ par $\vec{X}$ et $\vec{a}$ par $\vec{A}$, $\vec{X}$ et $\vec{A}$ étant les quadrivecteurs définis en (2). Nous avons donc :

$$(9)\qquad \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} = \frac{\partial H(\vec{A})}{\partial\vec{A}}\,,$$

dont les trois premières composantes sont identiques à (7). La quatrième composante de (9) est :

$$(10)\qquad \frac{\partial t}{\partial\sigma} = -\,\frac{\partial H(a_x\,, a_y\,, a_z\,, f)}{\partial f}\,.$$

Si nous éliminons le paramètre σ entre (7) et (10), nous obtenons :

$$(11)\qquad \vec{u} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial f(a)}{\partial\vec{a}}\,,$$

où nous avons supposé l'équation $H(a, f) = 0$ résolue pour $f = f(a)$. Le vecteur $\vec{u} = \partial\vec{x}/\partial t$ s'appelle la vitesse de groupe. C'est la vitesse de déplacement du centre d'une impulsion optique. Observons incidemment que si le milieu est non dispersif, la relation $H(\alpha\vec{A}) = \alpha H(\vec{A})$ implique, par le théorème d'Euler

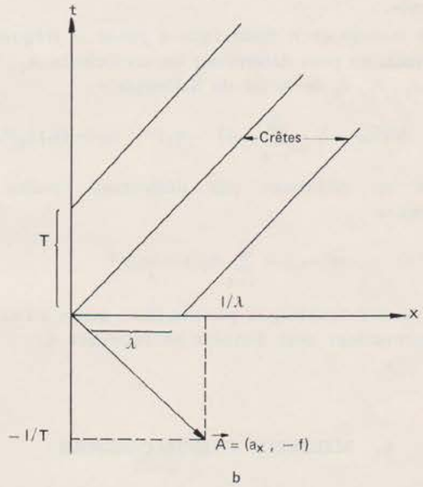

FIG. 2 *b*. — Représentation dans l'espace-temps.

sur les fonctions homogènes, que $\vec{A}\,.\,\partial H/\partial\vec{A} = H$. Nous avons par conséquent, utilisant (4) et (9), $(\partial\vec{X}/\partial\sigma).\,\vec{A} = 0$. La quadrivitesse est perpendiculaire au quadrivecteur d'onde. C'est ce que montre la figure 2 *b*.

(*) Pour éviter ultérieurement des confusions, nous utilisons le signe ∂ des dérivées partielles même lorsque la fonction dépend d'une seule variable [ici, σ pour $x = x(\sigma)$] et nous réservons le d droit pour la dérivée totale. Nous avons par exemple pour une fonction H de x et a où x et a sont des fonctions de σ :

$$dH(x, a)/d\sigma = (\partial H/\partial x)\,(\partial x/\partial\sigma) + (\partial H/\partial a)\,(\partial a/\partial\sigma).$$

3. PARAMÈTRES UTILISÉS EN PRATIQUE

Pour des raisons à la fois historiques et expérimentales, on utilise souvent à la place de la fréquence f la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \mathbf{c}/f, \tag{12}$$

où $\mathbf{c} = 3 \times 10^8$ m/s. Une fréquence de 300 téra-hertz = 300 000 gigahertz, par exemple, correspond à une longueur d'onde de 1 µm. On utilise aussi souvent l'indice de réfraction (de phase) :

$$n = \mathbf{c}/v \; ; \quad v = f/a, \tag{13}$$

et on définit l'indice de groupe :

$$n_g = \mathbf{c}/u \; ; \quad u = \partial f/\partial a. \tag{14}$$

Il est utile pour les calculs numériques de définir un indice de dispersion :

$$\bar{n} = \mathbf{c}/\sqrt{vu} = \mathbf{c}\sqrt{\partial(a^2)/\partial(f^2)}\,. \tag{15}$$

En l'absence de dispersion, $n = \bar{n} = n_g$.

L'indice de réfraction n d'un matériau isotrope peut être mesuré de façon précise par la méthode de la déviation minimale sur un échantillon en forme de prisme. Cette mesure est faite avec une source de fréquence optique f bien définie, obtenue par exemple en filtrant le rayonnement d'une lampe à vapeur de mercure.

La mesure de n étant faite à plusieurs fréquences optiques, on peut déterminer les coefficients A_1, A_2, A_3, l_1, l_2, l_3 de la loi de Sellmeier :

$$n^2(\lambda_0) - 1 = \sum_{\gamma=1}^{3} A_\gamma (1 - \pi_\gamma)^{-1} \; ; \; \pi_\gamma = (l_\gamma/\lambda_0)^2. \tag{16}$$

Nous en déduisons par dérivation l'indice de dispersion :

$$\bar{n}^2 - 1 = \sum_{\gamma=1}^{3} A_\gamma (1 - \pi_\gamma)^{-2}. \tag{17}$$

Des valeurs numériques pour la silice dopée à l'oxyde de germanium sont données en référence 4.

4. MILIEUX INHOMOGÈNES

Dans l'approximation de l'optique géométrique, la relation (9) est applicable aux milieux inhomogènes et dépendant du temps. On admet que :

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{\partial H(\vec{A}, \vec{X})}{\partial A}, \tag{18}$$

L'argument $\vec{X} = (x, y, z, t)$ de H dans (18) attirent l'attention sur le fait que la surface des vecteurs d'onde décrite par la fonction $H(\vec{A})$ est peut-être différente en différents points de l'espace et à différents instants. Dans ce qui suit, nous supposons le milieu indépendant du temps. L'équation (18) montre que la direction du rayon n'est pas constante, en général. Pour calculer la trajectoire du rayon, une seconde équation est nécessaire, qui spécifie comment le vecteur $\vec{A}$ varie le long d'une ligne d'univers : $\vec{X} = \vec{X}(\sigma)$.

Cette équation :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial H(\vec{A}, \vec{X})}{\partial \vec{X}} \tag{19}$$

est basée sur le fait que $\vec{A}$ est le gradient d'une fonction iconale. La démonstration sera omise (voir, par exemple, la référence 2). Les équations (18) et (19) sont les équations de Hamilton dans l'espace-temps. Elles définissent complètement la trajectoire d'une impulsion optique et son développement dans le temps si les conditions initiales sont spécifiées.

Considérons, à titre d'exemple, deux milieux homogènes séparés par un plan et prenons l'axe z suivant la normale au plan. Puisque les propriétés du milieu ne dépendent pas de x ou de y, il en est de même de la fonction H. Nous avons donc, d'après (19) :

$$\partial a_x/\partial\sigma = 0 \; , \; \partial a_y/\partial\sigma = 0.$$

Ceci veut dire que les composantes du vecteur d'onde sur les axes x et y sont continues à la jonction entre les deux milieux. Il est facile de voir que si les milieux sont isotropes, cette condition est équivalente à la loi de la réfraction de Descartes et de Snell :

$$n \sin i = n' \sin i'.$$

La loi de continuité de a_x et a_y, cependant, est générale. Pour simplifier, on peut supposer que la transition entre les deux milieux est progressive du point de vue de l'optique ondulatoire et ignorer le couplage entre ondes de types différents.

Un autre exemple simple est celui d'une fibre uniforme dans la direction z et indépendante du temps. Dans ce cas, la composante axiale a_z du vecteur d'onde et la fréquence optique f sont constantes le long du trajet d'une impulsion, quelle que soit la forme du gradient d'indice dans les directions x, y. Dans le langage de l'optique ondulatoire, a_z est la constante de propagation du mode associé au rayon.

Considérons les composantes spatiales de (18) et (19).

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} = \frac{\partial H}{\partial \vec{a}} \; ; \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}. \tag{20}$$

Ces deux équations définissent entièrement la trajectoire spatiale d'un rayon si le point de départ $(\vec{x}')$ et le point d'arrivée $(\vec{x})$ sont spécifiés (Fig. 3). La fonction iconale de point $S(\vec{x} \; ; \; \vec{x}' \; ; \; f)$ est le nombre de longueurs d'onde le long du rayon allant de $\vec{x}'$ à $\vec{x}$:

$$S(\vec{x}, \vec{x}', f) = \int_{\vec{x}'}^{\vec{x}} \vec{a} \,.\, \mathrm{d}\vec{x}. \tag{21}$$

Dans le cas de milieux isotropes, on peut remplacer

le produit scalaire $\vec{a} \,.\, \mathrm{d}\vec{x}$ par $a\,\mathrm{d}s$, où $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{x}|$ est la longueur élémentaire du rayon.

Le temps de trajet d'une impulsion allant de $\vec{x}'$ à $\vec{x}$ est obtenu à partir de la condition $S(\vec{x}, \vec{x}', f) - ft$ stationnaire, c'est-à-dire :

$$t(\vec{x}, \vec{x}', f) = \partial S(\vec{x}, \vec{x}', f)/\partial f\,. \tag{22}$$

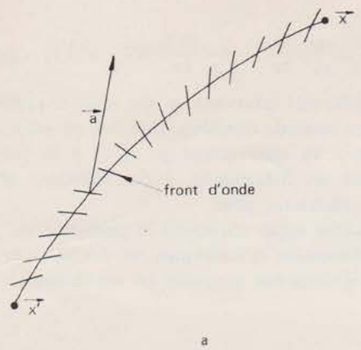

FIG. 3 *a*. — Rayon allant du point $\vec{x}'$ au point $\vec{x}$. Nous avons présenté les fronts d'onde locaux par de petites lignes transversales. Lorsque le milieu n'est pas isotrope, le vecteur d'onde $\vec{a}$ n'est pas, en général, dirigé suivant le rayon. La fonction iconale de point est le nombre de longueurs d'onde de $\vec{x}'$ à $\vec{x}$.

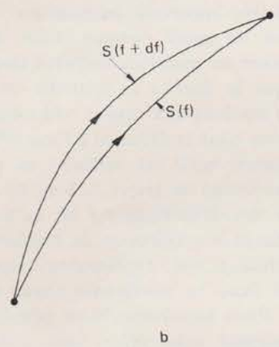

FIG. 3 *b*. — Rayons allant de $\vec{x}'$ à $\vec{x}$ à deux fréquences différentes.

Observons que le rayon à la fréquence f ne coïncide pas, en général, avec le rayon à la fréquence $f + \mathrm{d}f$. Cependant, le principe de Fermat, qui affirme que $S(\vec{x}, \vec{x}', f)$ est stationnaire si le trajet d'intégration est légèrement perturbé par rapport au trajet d'un rayon, nous permet d'ignorer cette difficulté. Si nous remplaçons S dans (22) par son expression (21), nous obtenons :

$$t(\vec{x}, \vec{x}', f) = \int_{\vec{x}'}^{\vec{x}} \mathrm{d}s/u\,, \tag{23}$$

où $u = |\partial f/\partial \vec{a}|$ est la vitesse de groupe locale dans la direction du rayon. Ce résultat peut être obtenu directement à partir des équations de Hamilton sans invoquer le principe de Fermat. Il est évident d'un point de vue mécanique : le temps de trajet d'une impulsion (ou d'une particule) est obtenu en intégrant le temps de parcours élémentaire $(\mathrm{d}s/u)$ le long de la trajectoire.

Observons que le temps de trajet $t(\vec{x}, \vec{x}', f)$ dépend, en général, de la fréquence f. Lorsque la porteuse de l'impulsion optique a une largeur spectrale non nulle, il est important de connaître la variation de t avec f. Celle-ci s'exprime au premier ordre par la dérivée $\partial t(\vec{x}, \vec{x}', f)/\partial f$. Il est ici indispensable de tenir compte du changement de trajectoire de l'impulsion lorsque l'on passe de la fréquence f à la fréquence voisine $f + \mathrm{d}f$, car t n'est pas stationnaire (*).

Pour passer de la forme hamiltonienne (20) à la forme classique applicable aux milieux isotropes, il suffit de prendre :

$$H(\vec{a}, \vec{x}) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a^2(f, x, y, z)\,. \tag{24}$$

L'équation (20) montre que $\mathrm{d}s = 2\,a\mathrm{d}\sigma$, où $\mathrm{d}s$ est la longueur élémentaire du rayon. On peut éliminer a par différentiation et remplacer a par $(f/c)n$. Nous obtenons alors la forme classique de l'équation des rayons :

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\vec{t}) = n\frac{\partial \vec{t}}{\partial s} + \vec{t}\left(\vec{t} \,.\, \frac{\partial n}{\partial \vec{x}}\right). \tag{25 a}$$

L'intégration numérique des équations de Hamilton (20), qui sont du premier ordre, est, en général, plus facile que l'intégration de (25), qui est du deuxième ordre. C'est là un avantage supplémentaire de la forme hamiltonienne. Observons que la trajectoire des rayons est inchangée si l'on multiplie $n(\vec{x})$ par une constante arbitraire.

Une autre forme utile de l'équation des rayons est :

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial \vec{x}}, \tag{25 b}$$

où le paramètre τ est défini par $\partial s/\partial\tau = n$.

Cette équation ressemble à l'équation qui décrit le mouvement d'une particule non relativiste dans un potentiel $-n^2/2$. Le paramètre τ cependant n'a pas, en général, la signification d'un temps de parcours.

5. PASSAGE AUX COORDONNÉES CYLINDRIQUES

La plupart des fibres optiques fabriquées aujourd'hui ont, au moins nominalement, la symétrie de révolution. Pour de tels milieux, il est commode d'utiliser un système de coordonnées cylindriques. Nous notons ce système r, φ, z, où φ est l'angle exprimé en tour, c'est-à-dire $\varphi \equiv \bar{\varphi}/2\pi$ si $\bar{\varphi}$ est exprimé en radian.

(*) Le principe de Fermat est un principe de temps stationnaire seulement dans certains milieux.

Donnons tout d'abord les formules générales de transformation applicables aux systèmes de coordonnées orthogonales. Soit x_1, x_2 les anciennes coordonnées, supposées rectilignes, et y_1, y_2 les nouvelles avec $x_1 = x_1(y_1, y_2)$; $x_2 = x_2(y_1, y_2)$.

Soit a_1, a_2 les composantes du vecteur d'onde dans l'ancien système (variables conjuguées de x_1, x_2) et b_1, b_2 les variables conjuguées de y_1, y_2. Nous avons :

$$b_1 = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} a_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_1} a_2, \qquad (26)$$

$$b_2 = \frac{\partial x_1}{\partial y_2} a_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} a_2.$$

Soit :

$$ds^2 = g_{11}(dy_1)^2 + g_{22}(dy_2)^2, \qquad (27)$$

le carré de l'élément de longueur exprimé en fonction de dy_1 et dy_2. La fonction hamiltonienne s'écrit, pour des milieux isotropes, dans le nouveau système :

$$H(b_1, b_2, y_1, y_2) = g_{11}^{-1} b_1^2 + g_{22}^{-1} b_2^2 - b^2(y_1, y_2),$$

$$b(y_1, y_2) \equiv a[x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)]. \qquad (28)$$

Observons que g_{11} et g_{22} dépendent, en général, de y_1 et y_2. Les équations de Hamilton ont la même forme dans le nouveau système et dans l'ancien, y_1, y_2, b_1, b_2 remplaçant x_1, x_2, a_1, a_2 respectivement. Nous avons donc :

$$\frac{\partial y_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial H(\vec{b}, \vec{y})}{\partial b_1}; \quad \frac{\partial y_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial H(\vec{b}, \vec{y})}{\partial b_2}, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \sigma} = -\frac{\partial H(\vec{b}, \vec{y})}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial b_2}{\partial \sigma} = -\frac{\partial H(\vec{b}, \vec{y})}{\partial y_2}.$$

Appliquons ces résultats aux coordonnées cylindriques avec $y_1 = r$, $y_2 = \varphi$, les variables z, t et leurs variables conjuguées a_z, f étant inchangées. Si nous substituons :

$$x \equiv x_1 = y_1 \cos(2\pi y_2) \; ; \; y \equiv x_2 = y_1 \sin(2\pi y_2) \qquad (30)$$

dans (26), nous trouvons que b_1 est la composante radiale du vecteur d'onde. Nous la noterons donc a_r. La variable b_2 est la composante axiale du moment angulaire $2\pi\, \vec{x} \times \vec{a}$. Nous la noterons μ. Cette quantité a une signification particulièrement claire dans le cas où le milieu a la symétrie de révolution et le rayon est un cercle de rayon r : μ est le produit du périmètre $2\pi r$ de ce cercle et de la fréquence spatiale a. C'est donc le nombre de longueurs d'onde le long du cercle. En optique ondulatoire, ce nombre est entier.

Pour une fibre uniforme et isotrope, la nouvelle fonction hamiltonienne (28) est :

$$H(a_r, \mu, a_z, f, r, \varphi) = a_r^2 + (\mu/2\pi r)^2 + a_z^2 - b^2(f, r, \varphi), \qquad (31\text{ a})$$

$$b(f, r, \varphi) = a(f, r\cos 2\pi\varphi, r \sin 2\pi\varphi). \qquad (31\text{ b})$$

Les équations de Hamilton (29) deviennent :

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = 2 a_r; \; \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{2\mu}{(2\pi r)^2}; \; \frac{\partial z}{\partial \sigma} = 2 a_z; \; \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 2 b \frac{\partial b}{\partial f}, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial r}\left[b^2(f, r, \varphi) - \left(\frac{\mu}{2\pi r}\right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \sigma} = 2 b \frac{\partial b(f, r, \varphi)}{\partial \varphi}; \; \frac{\partial a_z}{\partial \sigma} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0.$$

Ces équations montrent, en particulier, que si la fibre a la symétrie de révolution, c'est-à-dire si $\partial b/\partial\varphi = 0$, alors μ est une constante du mouvement [2, 5]. C'est la constante de Bouguer. Nous voyons aussi que le mouvement radial du rayon est défini par les équations :

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{a_r}{a_z}; \; \frac{\partial a_r}{\partial z} = \frac{1}{2 a_z} \frac{\partial b'^2}{\partial r}; \; b'^2 = b^2(f, r) - (\mu/2\pi r)^2, \qquad (33)$$

qui ne font pas intervenir φ. On appelle parfois b' la fréquence spatiale effective. Une fois choisies les trois constantes du mouvement μ, a_z et f, la trajectoire du rayon est déterminée, à des rotations et translations arbitraires près.

Une autre façon d'aborder le problème du passage aux coordonnées cylindriques est d'utiliser la formulation lagrangienne rappelée en appendice.

6. PROFIL OPTIMAL D'UNE FIBRE DISPERSIVE

Appliquons les résultats précédents à un problème simple, mais très important en pratique : celui de la détermination du profil optimal d'une fibre multimodale utilisant un matériau dispersif isotrope. Nous supposons que la fibre a la symétrie de révolution et nous nous limitons aux rayons hélicoïdaux, c'est-à-dire aux rayons dont la distance à l'axe est constante. On peut montrer qu'il est suffisant en pratique de considérer les temps de trajet le long de ces rayons.

Rappelons nos définitions : f est la fréquence de l'onde optique et $a = (f/c)n$ est la fréquence spatiale dans le matériau. r, z et t représentent respectivement la distance à l'axe, la coordonnée axiale et le temps de parcours d'une impulsion. Nous pouvons ici, sans risque d'ambiguïté, noter $b(f, r)$ sous la forme $a(f, r)$.

Pour un rayon hélicoïdal, nous avons :

$$\partial r/\partial\sigma = 2 a_r = 0.$$

D'après l'équation (31) avec $H = 0$ et (32), nous avons donc :

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{a}{a_z} \frac{\partial a(f, r)}{\partial f}, \qquad (34\text{ a})$$

$$a \frac{\partial a(f, r)}{\partial r} = -\frac{2}{r}\left(\frac{\mu}{2\pi r}\right)^2, \qquad (34\text{ b})$$

$$\left(\frac{\mu}{2\pi r}\right)^2 + a_z^2 = a^2(f, r). \qquad (34\text{ c})$$

Eliminons μ, entre (34 b) et (34 c) ; nous obtenons :

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial a(f, r)/\partial f}{\sqrt{1 + \frac{r}{a}\frac{\partial a(f, r)}{\partial r}}}. \qquad (35)$$

Le temps de trajet d'une impulsion optique le long d'un rayon hélicoïdal est obtenu en multipliant le

membre de droite de (35) par la longueur de la fibre. Si la fréquence porteuse f est fixe, il y a parfaite égalisation lorsque $t(r) = t(0)$, c'est-à-dire lorsque :

$$r \frac{\partial a(f, r)}{\partial r} = a\left[\left(\frac{\partial a/\partial f}{\partial a_0/\partial f}\right)^2 - 1\right], \qquad (36)$$

où $a_0(f) = a(f, 0)$ est la fréquence spatiale sur l'axe. Dans cette équation, nous pouvons considérer $\partial a/\partial f$ comme une fonction connue de a pour une classe de matériau déterminé, par exemple pour de la silice dopée de quantités variables d'oxyde de germanium. A partir de (36), nous obtenons le profil optimal $r = r(a)$ sous la forme :

$$r/r_c = \exp\left\{-\int_{a_c}^{a}\left[1 - \left(\frac{\partial a/\partial f}{\partial a_0/\partial f}\right)^2\right]^{-1} \frac{da}{a}\right\}, \qquad (37)$$

où nous avons introduit, pour être plus concret, le rayon r_c du cœur de la fibre et la fréquence spatiale a_c dans la gaine, avec $a(r_c) = a_c$ (Fig. 4).

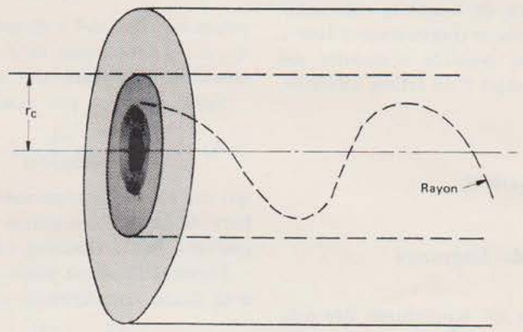

FIG. 4. — Fibre multimodale à gradient d'indice. Le rayon du cœur est noté r_c. Nous avons représenté un rayon hélicoïdal dont la distance à l'axe est constante. L'égalisation des temps de parcours le long de rayons hélicoïdaux est, en pratique, suffisant pour assurer un étalement minimal des impulsions optiques.

En l'absence de dispersion :

$$\partial a/\partial f = a/f \; ; \; \partial a_0/\partial f = a_0/f,$$

nous pouvons intégrer (37). Nous obtenons le profil de Kawakami et Nishizawa [6] :

$$\frac{a^2(r)}{a_0^2} = \left[1 + \left(\frac{a_0^2}{a_c^2} - 1\right)\left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right]^{-1} \qquad (38)$$

qui est quadratique au premier ordre en r.

Dans les applications, il est utile d'introduire un indice de phase relatif :

$$N(r) = 1 - n^2(r)/n_0^2, \qquad (39)$$

$$N(r_c) = 1 - n_c^2/n_0^2 \equiv 2\Delta,$$

et un indice de dispersion relatif :

$$\overline{N} = 1 - \overline{n}^2/\overline{n}_0^2. \qquad (40)$$

l'indice de dispersion $\overline{n}$ étant défini dans le paragraphe 3. $\overline{N}$ est une fonction connue de N, pour une certaine classe de matériau. Avec cette notation, la formule (37) s'écrit :

$$(r/r_c)^2 = \exp\left\{\int_{2\Delta}^{N} [2\overline{N} - \overline{N}^2 - N]^{-1}\, dN\right\}. \qquad (41)$$

Dans le cas de fibres à faible saut d'indice (disons, pour fixer les idées, $\Delta < 0{,}005$), nous pouvons négliger le terme $\overline{N}^2 \approx 4\Delta^2$ devant le terme $2\overline{N} - N \approx 2\Delta$. Nous pouvons aussi supposer que $\overline{n}^2$ est une fonction linéaire de n^2 et que, par conséquent, $\overline{N}$ est proportionnel à N. Nous écrivons : $\overline{N} = dN$, où d est une constante. L'intégration de (41) donne un profil en puissance de r, très voisin du profil optimal [2, 7].

$$N(r) = 2\Delta(r/r_c)^{2\kappa}, \quad \kappa = 2d - 1. \qquad (42)$$

En général, on doit procéder à l'intégration numérique de (41) [8]. Un exemple a été donné dans la référence [9].

Lorsque la condition (41) est remplie, l'étalement des impulsions est très petit. Un calcul détaillé montre que la largeur d'impulsion est :

$$\Delta t (t \text{ étant en ns/km}) = 310\,\Delta^2,$$

ce qui permet des débits d'information de l'ordre de 150 Mbit/s sur une distance de 10 km si le saut d'indice relatif Δ est de l'ordre de 1 %.

7. CONCLUSION

Nous espérons avoir atteint le but de cette étude, qui était de montrer au moyen d'exemples simples le sens physique des équations de Hamilton. Le concept fondamental introduit est celui de surface des vecteurs d'onde. Cette surface est définie dans

chaque région élémentaire de l'espace. Elle décrit les propriétés locales des rayons. On en déduit les équations de Hamilton qui permettent de calculer la trajectoire d'impulsions optiques dans l'espace-temps d'une façon simple et générale, et qui tiennent compte directement des symétries du système. Nous avons appliqué ces résultats aux fibres optiques multimodales en nous limitant à l'égalisation des temps de trajet le long des rayons hélicoïdaux. Une formule simple a été donnée, qui est applicable dans presque tous les cas pratiques (équation 41). Ce résultat particulier aurait sans doute pu être obtenu par des moyens plus élémentaires. L'utilité du formalisme hamiltonien est peut-être plus évidente lorsque l'on étudie la propagation dans des fibres présentant des déviations par rapport à la symétrie de révolution ou une certaine anisotropie due, par exemple, à des fluctuations radiales rapides de l'indice. L'intérêt de ce formalisme apparaît clairement aussi lorsque l'on considère les propriétés générales de paquets de rayons, soit incohérents (diode émettrice de lumière), soit cohérents et formant des congruences (rayonnement laser).

Il n'était cependant pas possible d'aborder ces questions ici ; elles feront l'objet d'un article ultérieur.

APPENDICE

La méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange est étroitement liée à la méthode de Hamilton. Nous la présentons ici brièvement.

Observons d'abord que si la trajectoire d'un rayon monochromatique est notée sous forme paramétrique $\vec{x} = \vec{x}(\sigma)$, la direction du rayon est celle du vecteur $\partial\vec{x}/\partial\sigma$. La fonction lagrangienne est une fonction de $\partial\vec{x}/\partial\sigma$ telle que $L d\sigma$ représente le nombre de longueurs d'onde (pas nécessairement entier) le long d'un rayon de $\vec{x}(\sigma)$ à $x(\sigma + d\sigma)$. Dans le cas d'un milieu isotrope, nous avons :

$$\text{(A-1)} \quad L(\partial\vec{x}/\partial\sigma) = a\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)^2\right]^{1/2}.$$

En effet, $L d\sigma = a|d\vec{x}| = ds/\lambda$, où $ds \equiv d|x|$.

Lorsque le milieu est inhomogène, L dépend non seulement de $\partial\vec{x}/\partial\sigma$, mais aussi de $\vec{x}$. Nous notons alors la fonction lagrangienne : $L(\partial\vec{x}/\partial\sigma, \vec{x})$. Dans l'équation (A-1), a devient une fonction de x, y et z.

Nous écrivons sans démonstration l'expression des quantités $\vec{a}$, conjuguées de $\vec{x}$:

$$\text{(A-2)} \qquad \vec{a} = \frac{\partial L\,(\partial\vec{x}/\partial\sigma, \vec{x})}{\partial(\partial\vec{x}/\partial\sigma)},$$

et l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\text{(A-3)} \qquad \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\partial L(\partial\vec{x}/\partial\sigma, \vec{x})}{\partial(\partial\vec{x}/\partial\sigma)}\right] = \frac{\partial L(\partial\vec{x}/\partial\sigma, \vec{x})}{\partial\vec{x}}.$$

Cette dernière définit entièrement la trajectoire des rayons dès que les conditions initiales ($\vec{x}$ et la direction de $\partial\vec{x}/\partial\sigma$) sont précisées.

Si nous substituons dans (A-3) la forme (A-1) de L applicable aux milieux isotropes en coordonnées rectangulaires, et utilisons comme paramètre :

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2},$$

nous obtenons l'équation (25) :

$$\text{(A-4)} \qquad \frac{d}{ds}\left(a\,\frac{\partial\vec{x}}{\partial s}\right) = \frac{\partial a}{\partial\vec{x}}.$$

Un autre choix utile est $\sigma = z$.

Les relations (A-2) et (A-3) sont indépendantes des coordonnées choisies. En coordonnées cylindriques, la fonction lagrangienne s'écrit :

$$\text{(A-5)} \quad L\left(\frac{\partial r}{\partial\sigma}, \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}, \frac{\partial z}{\partial\sigma}, r, \varphi, z\right) = a(r, \varphi, z)\left[\left(\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(2\pi r\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)^2\right]^{1/2},$$

puisque $ds^2 = dr^2 + (2\pi r d\varphi)^2 + dz^2$. Les variables a_r, μ, a_z conjuguées de r, φ, z, respectivement, sont obtenues immédiatement à partir de (A-2).

Nous obtenons par exemple :

$$\text{(A-6)} \qquad \mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial\varphi/\partial\sigma)} = a(2\pi r)^2\frac{\partial\varphi}{ds},$$

qui est bien la composante axiale du moment angulaire du rayon. Les autres relations du paragraphe 5 peuvent être retrouvées de la même façon.

Formellement, on passe de la forme hamiltonienne à la forme lagrangienne en résolvant les équations :

$$\text{(A-7)} \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial s} = \theta\,\frac{\partial H}{\partial\vec{a}}\,; \quad H(\vec{a}, \vec{x}) = 0.$$

pour a et θ, et en substituant le résultat dans :

$$\text{(A-8)} \qquad L\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial s}, \vec{x}\right) = \theta\,\vec{a}\,\frac{\partial H}{\partial\vec{a}}.$$

Par exemple, nous obtenons en résolvant (A-7), pour la fonction hamiltonienne :

$$H(\vec{a}, x) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a^2(\vec{x}).$$

$$\text{(A-9)} \quad \theta = (1/2\,a)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$a_x = (1/2\,\theta)\,(\partial x/\partial\sigma),$$

$$a_y = (1/2\,\theta)\,(\partial y/\partial\sigma),$$

$$a_z = (1/2\,\theta)\,(\partial z/\partial\sigma).$$

Si nous substituons ce résultat dans (A-8), nous obtenons bien la fonction lagrangienne donnée en (A-1). Le lecteur pourra vérifier de la même façon le passage de (31) à (A-5) pour le cas des coordonnées cylindriques.

REMERCIEMENTS.

Une partie de la présente étude a été présentée par l'auteur au CNET à Lannion, en septembre 1976, à l'invitation de Monsieur Le Mezec. L'auteur lui adresse ses remerciements.

Manuscrit reçu le 7 février 1977.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Weinberg (S.). Eikonal method in magnetohydrodynamics (La méthode de l'iconale en magnétohydrodynamique). *Phys. Rev.*, U. S. A. (1962), **126**, nº 6, p. 1 899.

[2] Arnaud (J.). Beam and fiber optics *Acad. Press.* New-York (1976).

[3] Brandstatter (J. J.). Waves, rays and radiations in plasma media (Ondes, rayons et rayonnement dans les plasmas). *McGraw Hill*, New York (1963).

[4] Arnaud (J. A.), Fleming (J. W.). Pulse broadening in multimode optical fibers with large $\Delta n/n$: numerical results (Etalement d'impulsion dans les fibres optiques multimodales ayant un grand $\Delta n/n$) *Electron letters* G. B. (avr. 1976), **12**, nº 7, pp. 167-169.

[5] Jacomme (L.). A model for ray propagation in a multimode graded index fibre (Un modèle pour la propagation dans les fibres multimodales à gradient d'indice). *Optic Communic.*, U. S. A. (mai 1975), **14**, nº 1, pp. 134-138.

[6] Kawakami (S.), Nishizawa (J.). An optical waveguide with the optimum distribution of the refractive index with reference to waveform distortion (Guide d'onde optique ayant une distribution d'indice optimal en ce qui concerne la déformation du train d'onde). *I.E.E.E. Trans. M.T.T.* U.S.A. (oct. 1968), **16**, nº 10, pp. 814-818.

[7] Olshansky (R.), Keck (D.). Pulse broadening in graded index optical fibers (Etalement des impulsions dans les fibres optiques à gradient d'indice). *Appl. opt.* U.S.A. (fév. 1976) **15**, nº 2, pp. 483-491.

[8] Marcatili (E. A. J.), Modal dispersion in optical fibers with arbitrary numerical aperture and profile dispersion (Dispersion modale des fibres optiques ayant une ouverture numérique et une dispersion de profil arbitraires). *Bell Syst. tech. J.*, U. S. A. (jan.1977), **56**, nº 1, pp. 49-63.

[9] Arnaud (J. A.). Optimum profiles for dispersive multimode fibers (Profils optimaux pour fibres multimodales dispersives). *Opt. and Quant. Electron.*, U. S. A. (mars 1977), **9**, nº 3, pp. 111-119.